Selektionsindex - Mehrere Merkmale

Peter von Rohr

Qualitas AG

Administrative Angelegenheiten

Keine Vorlesung am 9. Oktober 2015

Mögliche Alternativen sind

- Zusatztermin
- Während dreier Wochen eine Lektion kompensieren
- Entscheidung vor 9. Oktober 2015

Einführung in Vektoren

Vektoren können von zwei Seiten her eingeführt werden

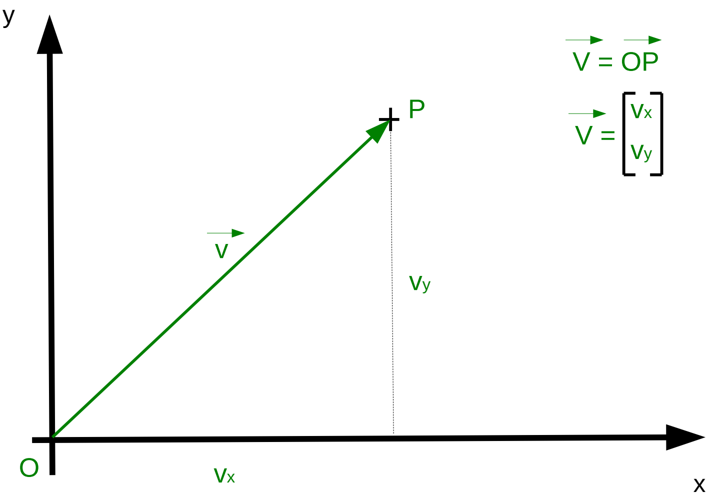
Geometrie

- Ortsvektor - Koordinaten eines Punktes
- Beschreibung einer Parallelverschiebung

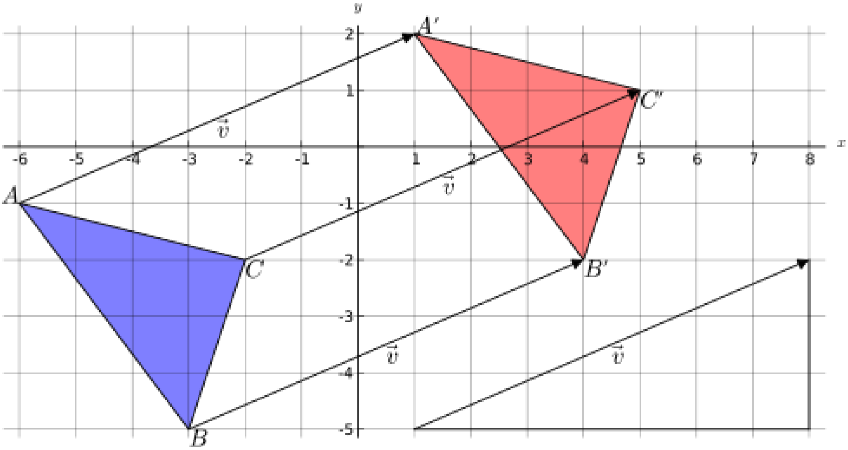
Algebra - Gleichungssysteme

- Als Zusammenfassung der Unbekannten eines Gleichungssystems
- Als Zusammenfassung der Rechten Hand Seite (RHS) eines Gleichungssystems
- Braucht Matrizen

Ortsvektor


y
P
$\vec{V}$
v_y
O
v_x
x
$\vec{V} = \vec{OP}$
$\vec{V} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$

Parallelverschiebung



Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Vektoren.svg

Rechnen mit Vektoren - Vektoroperationen

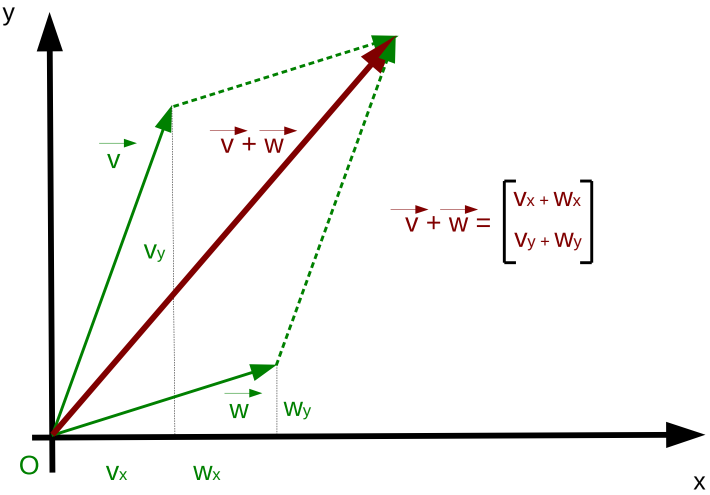
Addition zweier Vektoren

- Pfeile beider Vektoren zu Kette zusammenhängen
- Resultatvektor vom Anfang des ersten bis zum Ende des zweiten Vektors
- Koordinatenkomponenten werden addiert

Multiplikation mit einem Skalar

- Mehrfache Addition des gleichen Vektors: $\vec{v} + \vec{v} + \vec{v} = 3 * \vec{v}$
- Koordinatenkomonenten werden mit Skalar multipliziert

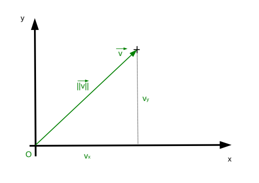
Vektoraddition



$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{bmatrix} v_x + w_x \\ v_y + w_y \end{bmatrix}$$

Rechnen mit Vektoren - Vektoroperationen II

Länge eines Vektors



- Nach Satz von Pythagorras
- Definition $||\mathbf{v}|| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

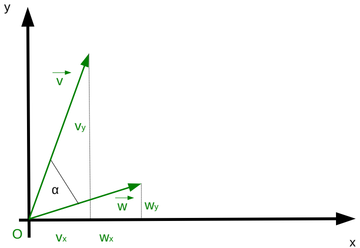
Verschiedene Arten von Vektoren

- Unterscheidung der Vektoren in Zeilenvektoren $\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} v_x & v_y \end{bmatrix}$
- und Kolonnenvektoren $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix}$

Rechnen mit Vektoren - Vektoroperationen III

Skalarprodukt zweier Vektoren - ergibt eine Zahl

- Skalarprodukt der Vektoren $\mathbf{v}^T$ und $\mathbf{w}$ entspricht dem Produkt der Längen der Vektoren mal dem Cosinus des Zwischenwinkels
- Berechnung: $\mathbf{v}^T * \mathbf{w} = v_x * w_x + v_y * w_y$
- Bedeutung: $cos(\alpha) = \frac{\mathbf{v}^T * \mathbf{w}}{||\mathbf{v}|| * ||\mathbf{w}||}$



Rechnen mit Vektoren in R

Erzeugung von Vektoren in R

- Erzeugung von Vektoren mit Funktion `vector()`
- Beispiel

```
> vecNum <- vector(mode = "numeric", length = 2)
```

Zuweisung von Werten zu Vektoren

```
> vecNum[1] <- 5
> vecNum[2] <- -7
> print(vecNum)
```

```
[1]  5 -7
```

Rechnen mit Vektoren in R II

Erzeugung und Zuweisung in einem Schritt mit c()

```
> vecNum <- c(5, -7)
> print(vecNum)

[1]  5 -7
```

Addition

```
> vecA <- c(12, -4)
> vecB <- c(-3, 43)
> vecA + vecB

[1]  9 39
```

Skalarprodukt auf zwei Arten

Funktion crossprod()

```
> vecA <- c(12, -4)
> vecB <- c(-3, 43)
> crossprod(vecA, vecB)

     [,1]
[1,] -208
```

Matrix-Multiplikation

```
> t(vecA) %*% vecB

     [,1]
[1,] -208
```

Einführung in Matrizen

Was ist eine Matrix

- Mehrere Kolonnenvektoren gleicher Länge nebeneinander
- Beispiel: $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x & w_x \\ v_y & w_y \end{bmatrix}$
- Mehrere Zeilenvektoren gleicher Länge untereinander
- Beispiel: $\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} v_x & v_y \end{bmatrix}$, $\mathbf{w}^T = \begin{bmatrix} w_x & w_y \end{bmatrix}$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}^T \\ \mathbf{w}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{bmatrix}$$

Rechnen mit Matrizen

Eigenschaft von Matrizen

- Dimension: Anzahl Zeilen und Anzahl Kolonnen
- Bespiel: $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc} 3 & 2 & -3 \\ 54 & -9 & 1 \end{array}\right]$, $dim(\mathbf{A}) = 2 \times 3$

Addition von Matrizen

- Matrizen werden komponenten-weise addiert
- nur Matrizen gleicher Dimension können addiert werden
- Reihenfolge der Summanden spielt keine Rolle (kommutativ)

Rechnen mit Matrizen II

Summe der Matrizen

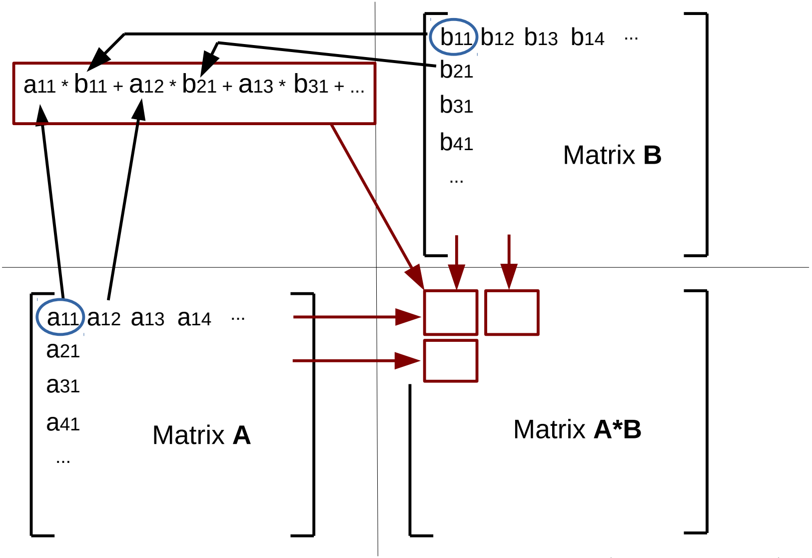
- Beispiel: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$
- $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$

Rechnen mit Matrizen III

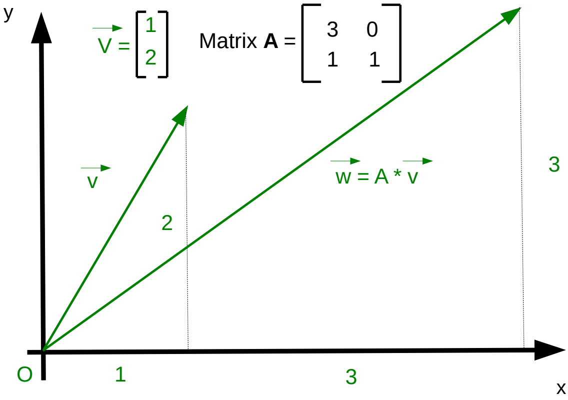
Matrix Multiplikation

- "Zeilen Mal Kolonnen"
- Dimensionen der beiden Matrizen müssen stimmen.
- $m \times n$ kann nur mit $n \times q$ Matrix multipliziert werden
- Resultat ist eine Matrix mit Dimension $m \times q$
- Reihenfolge der Faktoren ist wichtig, kann nicht vertauscht werden (nicht kommutativ)

Matrix Multiplikation



Bedeutung der Matrix ∗ Vektor Multiplikation



Multiplikation von Matrix **A** mal Vektor **v** kann als Transformation von **v** in neuen Vektor **w** betrachtet werden.

Matrizen und Vektoren zur Lösung von Gleichungssytemen

2 Gleichungen mit 2 Unbekannten

$$
\begin{array}{rcrcl}
3 * x & - & 5 * y & = & 4 \\
2 * x & + & y & = & 7
\end{array}
$$

In Matrix-Vektor Schreibweise

- Definiere Matrix $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$
- Definiere Vektoren $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ und $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$
- Gleichung kann geschrieben werden als $\mathbf{A} * \mathbf{v} = \mathbf{w}$

Lösen der Gleichung

Klassisch

- Elimination der unbekannten y aus der zweiten Gleichung
- Einsetzen in erste Gleichung $\rightarrow x =$

Matrix-Vektor

- Spezielle Matrix $\mathbf{I} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$, Einheitsmatrix, da $\mathbf{I} * \mathbf{v} = \mathbf{v}$
- Suche Matrix $\mathbf{B}$, so dass $\mathbf{B} * \mathbf{A} = \mathbf{I}$
- Gleichung von links mit $\mathbf{B}$ multiplizieren $\rightarrow \mathbf{B} * \mathbf{A} * \mathbf{v} = \mathbf{B} * \mathbf{w}$
- Somit ist $\mathbf{v} = \mathbf{B} * \mathbf{w}$, Berechnung, später mit R (`solve()`)
- Matrix $\mathbf{B}$ heisst Inverse von $\mathbf{A}$ und wird mit $\mathbf{A}^{-1}$ bezeichnet

Matrizen in R

- Konstruktion mit Funktion `matrix()`
- Beispiel

```
> (matA <- matrix(c(3,1,0,1), ncol = 2))
     [,1] [,2]
[1,]    3    0
[2,]    1    1
```

- Matrixelemente als Vektor, Anzahl Kolonnen als Argument `ncol`
- Matrixelemente werden per-default Kolonnen-weise abgefüllt
- Zeilen-weises Abfüllen mit Argument `byrow = TRUE`

Matrizen in R II

- Beispiel für Zeilen-weises Abfüllen der Matrix

```
> (matB <- matrix(c(3,1,0,1), ncol = 2, byrow = TRUE))

     [,1] [,2]
[1,]    3    1
[2,]    0    1
```

- Dimension einer Matrix mit Funktion `dim()`

```
> dim(matB)

[1] 2 2
```

- Transponieren einer Matrix - Vertausch von Zeilen und Kolonnen

```
> t(matB)

     [,1] [,2]
[1,]    3    0
[2,]    1    1
```

Determinante, Spur und Matrix-Addition in R

- Determinante einer Matrix mit Funktion `det()`

```
> det(matB)
[1] 3
```

- Spur einer Matrix

```
> sum(diag(matB))
[1] 4
```

- Matrix Addition

```
> matA + matB
     [,1] [,2]
[1,]    6    1
[2,]    1    2
```

Matrix Multiplikation in R

- gewöhnliche Multiplikation mit $*$ multipliziert Komponenten
- Matrixmultiplikation mit %*%
- Beispiel

```
> matA %*% matB
     [,1] [,2]
[1,]    9    3
[2,]    3    2
> vecV <- c(1,2)
> matA %*% vecV
     [,1]
[1,]    3
[2,]    3
```

Lösung des Gleichungssystems in R

- Zuweisung der Matrize und des Vektors

```
> (matAlhs <- matrix(c(3,2,-5,1), ncol = 2))

     [,1] [,2]
[1,]    3   -5
[2,]    2    1

> (vecWrhs <- c(4,7))

[1] 4 7
```

- Berechnung der Inversen von `matAlhs`

```
> (matAInv <- solve(matAlhs))

            [,1]      [,2]
[1,]  0.07692308 0.3846154
[2,] -0.15384615 0.2307692
```

Lösung des Gleichungssystems in R

- Lösung

```
> (vecVsol <- matAInv %*% vecWrhs)
```

```
     [,1]
[1,]    3
[2,]    1
```

- Überprüfung

```
> matAlhs %*% vecVsol
```

```
     [,1]
[1,]    4
[2,]    7
```

- Inversion und Lösung in einem Schritt mit

```
> solve(matAlhs, vecWrhs)
```

```
[1] 3 1
```

Selektion mit mehrere Merkmale

- Beispiele von letzter Woche, alle nur für ein Merkmal - wenig relevant für praktische Anwendung
- Praxis: eine Vielzahl von Merkmalen sind in Zuchtzielen enthalten
- Merkmale in antagonistischer Beziehung, z.Bsp Milchleistung - Fruchtbarkeit - Nutzungsdauer
- Wie können Informationen von potentiellen Elterntieren kombiniert und verglichen werden?

Vergleich zweier Tiere mit eigener Leistung

	Kuh Hilda	Kuh Frieda
Milchleistung (kg)	9000	6000
Milchfett (%)	3.5	4.5
Milcheiweiss (%)	3.2	3.5

- Welche Kuh ist besser geeinget als Mutter?
- Wie kann das genetische Potential der beiden Kühe abgeschätzt werden?
- Welcher Massstab soll verwendet werden für die Beurteilung?

Festlegung einer Zielgrösse - Wirtschaftlichkeit

- Definition des Zuchtziels so, dass potentielle Eltern die Wirtschaftlichkeit der Nachkommengeneration verbessern
- Wie kann ich Wirtschaftlichkeit abschätzen?
- $\rightarrow$ Veränderung des Gewinns bei marginaler Veränderung eines Merkmals
- $\rightarrow$ *Wirtschaftliches Gewicht*

Einfache Berechnung von wirtschaftlichen Gewichten

Einfaches Produktionssystem

- Annahme: hypothetischer reiner Produktionsbetrieb
- Zukauf von Futter
- Remontierung über zugekaufte Tiere
- Erfassung von Erlös und Kosten und Berechnung des Gewinns

Veränderung der Produktion um eine kleine Einheit

- Erfassung der Veränderung von Erlös, Kosten und Gewinn
- Veränderung des Gewinns pro Veränderung der Produktion ergibt wirtschaftliches Gewicht

Rechenbeispiel

Milchleistung - aktuelle Generation

- Herde von 50 Kühen mit einem Schnitt von 7000kg
- Milchpreis sei 0.55 Fr/kg
- Kosten (Arbeit, Futter, Stallplatz) 0.45 Fr/kg
- Gewinn 0.1 Fr/kg

Nächste Generation

- Durchschnittliche Leistung 7001kg aufgrund genetischer Verbesserung
- Rest ist gleich
- Veränderung des Gewinns: ?

Zusammenfassung der Ergebnisse

Bitte vervollständigen Sie die folgende Tabelle mit den wirtschaftlichen Kennzahlen der fiktiven Herde mit 50 Kühen über zwei Generationen in Fr/Jahr

	Erlös	Kosten	Gewinn
Aktuelle Generation			
Nächste Generation			
Veränderung			

Berechnung des wirtschaftlichen Gewichts

Das wirtschaftliche Gewicht für das Merkmal Milchleistung entspricht der Veränderung des Gewinns in Fr/kg

Veränderung des Gewinns	
Veränderung der Menge	
Wirtschaftliches Gewicht	

Genetisches Potential - Gesamtzuchtwert

- Quantifizierung der Änderung von Eltern zu Nachkommen
- $\rightarrow$ Zuchtwert (siehe Quantitative Genetik)
- Kombination aus wirtschaftlichen Gewichten und Zuchtwerten führt zum *Gesamtzuchtwert*
- **Wichtig**: Gesamtzuchtwert entspricht der mathematischen Formulierung des Zuchtziels

Berechnung Gesamtzuchtwert

- Mathematisch ist der Gesamtzuchtwert $\mathbf{H}$ als gewichtetes Mittel aus wirtschaftlichen Gewichten $\mathbf{v}$ und Zuchtwerten $\mathbf{g}$ definiert
- In Vektorschreibweise heisst das:

$$\mathbf{H} = \mathbf{v}^T * \mathbf{g}$$

- Zurück zu unserem Beispiel

	Hilda ($\mathbf{g}$)	Frieda ($\mathbf{g}$)	$\mathbf{v}$(Fr/Einheit)
Milchleistung (kg)	9000 (+50)	6000 (+150)	+0.05
Milchfett (%)	3.5 (−0.1)	4.5 (+0.05)	−0.01
Milcheiweiss (%)	3.2 (+0.1)	3.5 (+0.1)	+0.005
H (Fr)			

Woher kommen die Zahlen?

- Wirtschaftliche Gewichte **v** können aufgrund von Gewinngleichungen oder aufgrund anderer Methoden berechnet werden(siehe später in dieser Veranstaltung)
- Wahre Zuchtwerte sind unbekannt und werden aus Beobachtungen geschätzt
- Heute: statistische Verfahren zur Schätzung von Zuchtwerten aufgrund von
  - phänotypischen Leistungen
  - Pedigreeinformationen
  - Umweltbedingungen
  - neu: genomische Informationen

Geschichte der Indexselektion

- Hazel und Lush (1943): Gewichtung von phänotypischen Informationen von Individuen zu einem Index $\mathbf{I}$, damit die Korrelation r_{IH} zwischen Gesamtzuchtwert $\mathbf{H}$ und Index $\mathbf{I}$ maximal ist
- Index $\mathbf{I}$ sei definiert als

$$\mathbf{I} = \mathbf{b}^T * \mathbf{p}$$

Herleitung der Indexgewichte

- Aus der Definition von $\mathbf{I}$ und der Bedingung, dass r_{IH} maximal ist, folgt
- $\rightarrow$ $\mathbf{Gv} = \mathbf{Pb}$ (Herleitung für Interessierte)
- $\rightarrow$ $\mathbf{b} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Gv}$
- $\mathbf{G}$: genetische Co-Varianz Matrix
- $\mathbf{P}$: phänotypischen Co-Varianz Matrix

Ausblick

- Anstelle von phänotypischen Eigenleistungen als Informationen kann die Ableitung der Indexgleichung auf andere Informationsquellen erweitert werden.
- Prinzip des Aufstellens der Gleichungen und der Herleitung der Gewichte bleiben gleich.
- Weitere Beispiele für Selektionsindices werden folgen ...

Übersicht über Multiplikationen in R

	*	%*%	%o%
Zahl(Skalar)	normal	normal	normal
Vektor	komponentenweise	Skalarprodukt	Äusseres Produkt ($\mathbf{v}\mathbf{v}^T$)
Matrix	komponentenweise	Matrix-Multiplikation	Äusseres Produkt