Züchtungslehre - Lösung 1

Peter von Rohr

September 28, 2015

Aufgabe 1 (2)

Falls bei der Installation von R und/oder RStudio Proble aufgetreten sind, dann bitte bei mir melden.

Aufgabe 2 (5)

a Die zwei Arten der künstlichen Selektion lauten *gerichtete Selektion* und *stabilisierende Selektion*

b Da es sich laut Aufgabenstellung um ein Merkmal mit einem Optimum (Optimum-Merkmal) handelt, ist *stabilisierende Selektion* zu empfehlen

c *Zusatzaufgabe*: Da bei der Normalverteilung rund 68% der Fläche unter der Kurve im Bereich von plus und minus eine Standardabweichung um den Mittelwert liegen, wäre eine erste mögliche Antwort:

```
> nMittelWert <- 112
> nStdAbw <- 10.75
> cat("Untere Selektionsgrenze: ", nMittelWert - nStdAbw, "\n")

Untere Selektionsgrenze:  101.25

> cat("Obere Selektionsgrenze:  ", nMittelWert + nStdAbw, "\n")

Obere Selektionsgrenze:   122.75
```

Eine weitere Lösungsmöglichkeit besteht in der Verwendung der Funktion `qnorm(p, mean, sd)` in R. Dabei steht `p` für den gewünschten Flächen Anteil unter der Normalverteilung vom linken Ende an gerechnet und `mean` und `sd` stehen für Mittelwert und Standardabweichung.

Der gewünschte Anteil der Fläche unter der Normalverteilung verteilt sich aus Symmetriegründen je zur Hälfte auf die vom Mittelpunkt linke und rechte Seite der Glockenkurve. Also entspricht die untere Selektionsgrenze dem Quantil bei einem Flächenanteil von $0.5 - 0.34 = 0.16$. Dieses Quantil wird dann in R wie folgt berechnet.

```
> qnorm(0.16, mean = 112, sd = 10.75)
```

```
[1] 101.3096
```

Analog dazu die obere Selektionsgrenze entspricht dem Quantil bei einem Flächenanteil von $0.5 + 0.34 = 0.84$.

```
> qnorm(0.84, mean = 112, sd = 10.75)
```

```
[1] 122.6904
```

Die beiden Antworten sind nicht gleich, da der Flächenanteil unter der Normalverteilung im Bereich plus- / minus- eine Standardabweichung etwas mehr als 68% ist. Exakt berechnet, beträgt der Anteil

```
> pnorm(112+10.75, mean = 112, sd = 10.75) - pnorm(112-10.75, mean = 112, sd = 10.75)
```

```
[1] 0.6826895
```

Aufgabe 3 (10)

Gemäss dem Hinweis werden wir zeigen, dass die erste Formel zur Berechnung der empirischen Varianz s^2 in die zweite Formel verwandelt werden kann und die beiden Formeln somit äquivalent sind.

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \tag{1}$$

Als weitere Vereinfachung multiplizieren wir beide Seiten der Gleichung mit dem Faktor $n - 1$.

$$(n-1)s^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \tag{2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) \tag{3}$$

Der Schritt von Gleichung (2) zu Gleichung (3) erfolgt aufgrund des Hinweises zur binomischen Formel. Das Summenzeichen kann jetzt zu den einzelnen Summanden hereingezogen werden.

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} 2x_i\bar{x} + \sum_{i=1}^{n} \bar{x}^2 \tag{4}$$

Alle Terme in einer Summe, welche nicht den Subskript i haben, sind konstant und können vor die jeweiligen Summen herausfaktorisiert werden.

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + n\bar{x}^2 \tag{5}$$

Nun setzen wir für den Mittelwert die Definition $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ ein.

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\sum_{i=1}^{n} x_i + n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \tag{6}$$

Der zweite und der dritte Term von Gleichung (6) können vereinfacht werden zu

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + \frac{n}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \tag{7}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \tag{8}$$

Der zweite Term ohne Vorzeichen ist das doppelte des dritten Terms, somit lassen diese sich zusammen verrechnen zu

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \tag{9}$$

Machen wir jetzt die erste Vereinfachung mit dem Faktor $n-1$ wieder rückgängig, so können wir nun die Formel für die empirische Varianz und die empirische Standardabweichung aufschreiben als

$$(n-1)s^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \tag{10}$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right) \tag{11}$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right)} \tag{12}$$