ETH zürich

Zuchtwertschätzung mit Best Linear Unbiased Prediction Verfahren

Birgit Gredler-Grandl

Termine und Inhaltsübersicht

06. Nov. 2015	VCE, BLUP-Zuchtwertschätzung	ZL I
13. Nov. 2015	BLUP-Zuchtwertschätzung	ZL I
20. Nov. 2015	Kopplungsungleichgewicht	ZL II
27. Nov. 2015	QTL-Mapping und Genomweite Assoziationsstudien	ZL II
04. Dez. 2015	Genomweite Assoziationsstudien und Genomische Selektion	ZL II
11. Dez. 2015	Genomische Selektion	ZL II
18. Dez. 2015	Prüfung	ZL II

Termine

- Keine Vorlesung am 9. Oktober 2015: 2 Einheiten kompensiert mit Peter von Rohr → 1 Einheit noch frei
- 18. Dezember 2015 Prüfung → 1 Einheit noch frei
- Zumindest 1 Einheit noch einholen
- An welchem Termin?

Heutige Vorlesung

- **Zuchtwertschätzung mittels BLUP Tiermodell**
  - Was heisst BLUP?
  - Was sind Mischmodellgleichungen?
  - Wie berechnen sich Zuchtwerte mit einem BLUP Tiermodell?

Bei der Zuchtwertschätzung werden umfangreiche Gleichungssysteme mit der Matrix Algebra gelöst…

Kenntnisse der Algebra der Matrizen Voraussetzung !

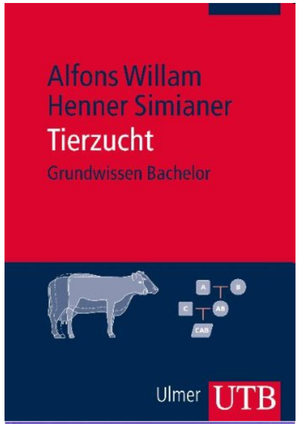
$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda \mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}$$

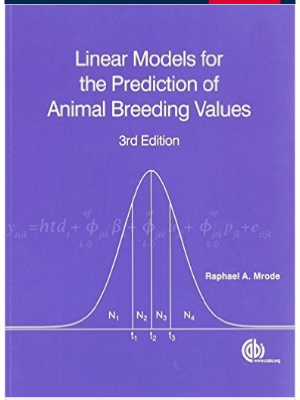
Literatur

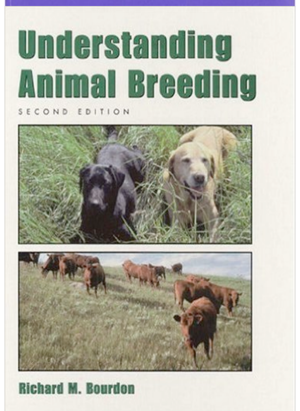
- Alfons Willam & Henner Simianer, *Tierzucht*

- Raphael A. Mrode, *Linear Models for the Prediction of Animal Breeding Values*

- Richard M. Bourdon, *Understanding Animal Breeding*







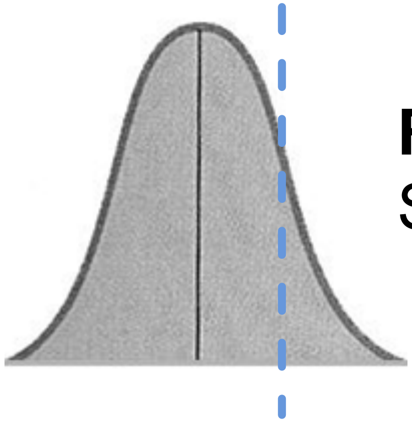
Beiträge in Form von Folien, Ideen, Konzepte ... von

- **Chris Baes**, University Guelph (CA)
  - VO-Unterlagen ETH
- Alfons Willam, BOKU Wien
  - VO-Unterlagen „Spezielle Tierzucht“
- Marlies Dolezal, VETMED Wien
  - Diverse VO-Unterlagen
- Roswitha Baumung, BOKU Wien
  - VO-Unterlagen „Biostatistik in den Nutztierwissenschaften“
- Kay-Uwe Götz, Bayerische Landesanstalt für Landwirtschaft
  - VO-Unterlage „Quantitative Genetik und Zuchtplanung“, TU München

Zuchtwerte als Selektionsinstrument

- Züchtung basiert auf **Selektion**

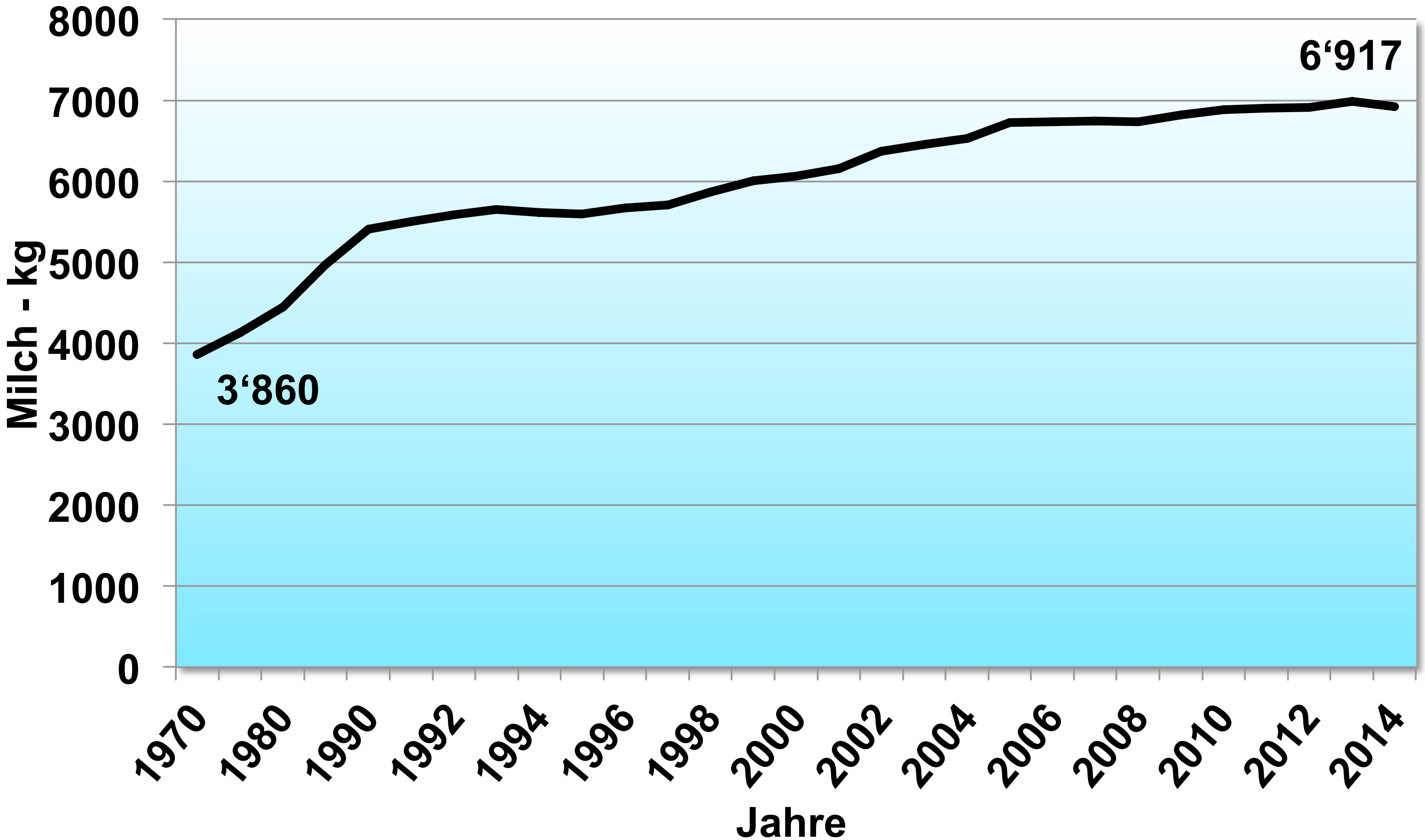
$\overline{x}_{Elterngeneration}$



Remonte
Selektierte Eltern der nächsten Generation

- Setzt voraus, dass ein Kriterium bzw. Instrument zur Verfügung steht um Tiere zu rangieren
- Zuchtwert ist das Werkzeug um Tiere nach ihrem genetischen Potenzial zu rangieren

Entwicklung Milchleistung bei Braunviehkühen in der Schweiz



Methoden der Zuchtwertschätzung

Selektionsindex
(Selektionsindextheorie nach Hazel und Lush, 1943)

BLUP Verfahren
Mischmodellgleichungen
(Henderson, 1973)

Lineare Modelle

Mit einem Modell versuchen wir die Wirklichkeit zu beschreiben, z.B. wie die Milchleistung einer Kuh zustande kommt. Das Modell sollte alle Kausaleffekte enthalten.

Modell der Leistung:

Phänotyp = Genotyp + Umwelt

Lineare Modelle

Mit einem Modell versuchen wir die Wirklichkeit zu beschreiben, z.B. wie die Milchleistung einer Kuh zustande kommt. Das Modell sollte alle Kausaleffekte enthalten.

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\hat{\mathbf{b}} + \mathbf{e}$$

Lineares Modell mit **fixen** Kausaleffekten

$$\mathbf{y} = \mathbf{Z}\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{e}$$

Lineares Modell mit **zufälligen** Kausaleffekten

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\hat{\mathbf{b}} + \mathbf{Z}\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{e}$$

Gemischtes lineares Modell mit **fixen** und **zufälligen** Kausaleffekten (Mixed Models)

Fixe versus zufällige Kausaleffekte

- Die Unterteilung in fixe und zufällige Effekte ist ein langjähriges Diskussionsthema
- Keine universell gültige Regel/Definition
- Statistisch kann jeder Effekt als fix oder zufällig betrachtet werden

Schätzung fixer Kausaleffekte

- Die in der Analyse berücksichtigten Ausprägungen (Stufen) eines Kausalfaktors sind **gezielt (fix) ausgewählt.**
  - z.B. Futterration, Rasse

- Fragestellung und Interpretation beschränken sich auf die jeweils **ausgewählten** Faktorstufen

- Unterscheiden sich Mittelwerte signifikant voneinander?

Schätzung zufälliger Kausaleffekte

- Die in der Analyse berücksichtigten Ausprägungen (Stufen) eines bestimmten Kausalfaktors können als **Zufallsstichprobe** aller möglichen Stufen in der **Grundgesamtheit** aufgefasst werden.

- Fragestellung und Interpretation zielt hier auf die **Grundgesamtheit aller möglichen** Faktorstufen ab.

- Variationsparameter - **Varianz**

Fixe versus zufällige Kausaleffekte

fixer Effekt

- Anzahl Effektstufen gering
- Interpretation – untersuchte Effektstufen
- Stichprobenziehung – gezielt
- Zielgrösse: Vergleich von Mittelwerten
- Rasse, Geschlecht, Futterration, ...

zufälliger Effekt

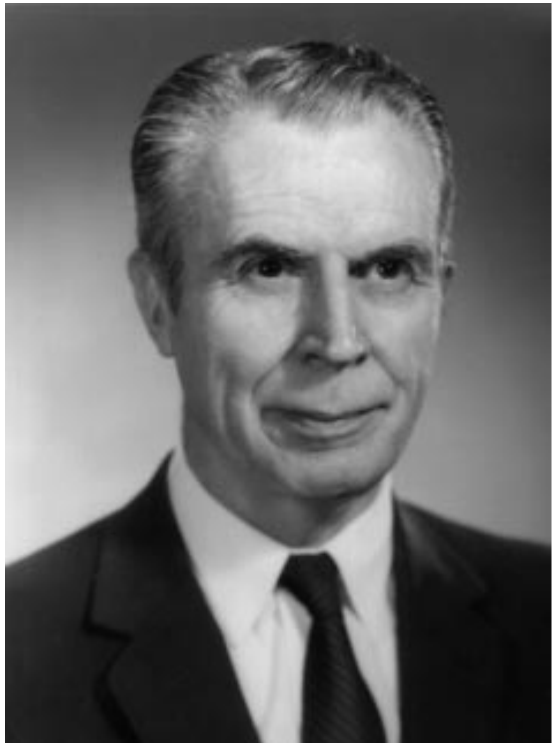
- Anzahl Effektstufen hoch
- Interpretation – Grundgesamtheit
- Stichprobenziehung – zufällig
- Zielgrösse: Schätzung von Varianzkomponenten
- Zuchtwerte (Tiereffekte)

BLUP Verfahren

- Weltweit **Goldstandard** für die Zuchtwertschätzung bei Nutztieren
- Der **Hauptvorteil** des BLUP Verfahrens ist die **simultane** Schätzung von **fixen und zufälligen** Effekten in der Zuchtwertschätzung (vor BLUP mussten die phänotyp. Leistungen um die systematischen Umwelteffekte vorkorrigiert werden)
- Die Theorie des BLUP Verfahrens wurde in den 70er Jahren publiziert, die breite Anwendung fand jedoch erst Ende der 80er / Anfang 1990 statt, als leistungsfähige Computer zur Verfügung standen.

Charles Roy Henderson (1911 – 1989)

- Iowa, PhD Student von JL Lush (siehe Selektionsindex)
- Entwickelte verschiedene Methoden zur Varianzkomponentenschätzung
- Entwickelte Methode für A^{-1}
- „*When I see a flock of cattle, I don‘t see hoofs and horns, but I see a mean and a variance*."
- Vater BLUP Tiermodell
- Entwickelte Mischmodellgleichungen um Zuchtwerte mit BLUP Eigenschaften zu erhalten



***A Biographical Memoir by* L. Dale Van Vleck**

Eigenschaften von BLUP

- BEST: Korrelation zwischen dem wahrem (a) und dem geschätzten (â) Zuchtwert wird maximiert (Minimierung des Schätzfehlers, Lösungen haben minimale Fehlervarianz - **Minimumvarianz**).

  $E(\hat{a} - a)^2 \Rightarrow$ Minimum!

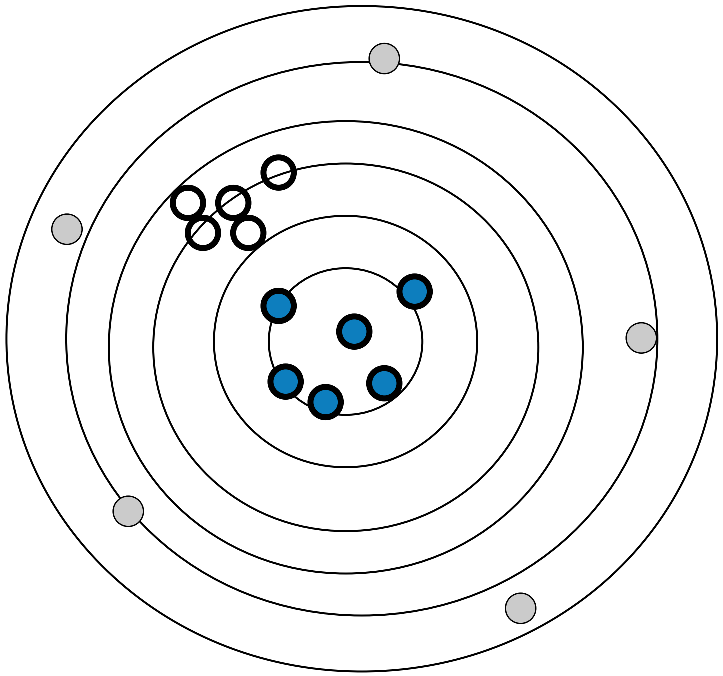
- LINEAR: die Schätzer für die Zuchtwerte sind lineare Funktionen der Beobachtungen
- UNBIASED: unverzerrt: die Erwartungswerte der Lösungen entsprechen den wahren Werten ($E(a) = E(\hat{a})$), keine systematische Über- oder Unterschätzung (**Erwartungstreue**)
- PREDICTION: Vorhersage von zufälligen Effekten

Symbolische Darstellung von Erwartungstreue und Minimumvarianz

Auf eine Zielscheibe wurden mit 3 verschiedenen Gewehren je 5 Schüsse abgegeben:

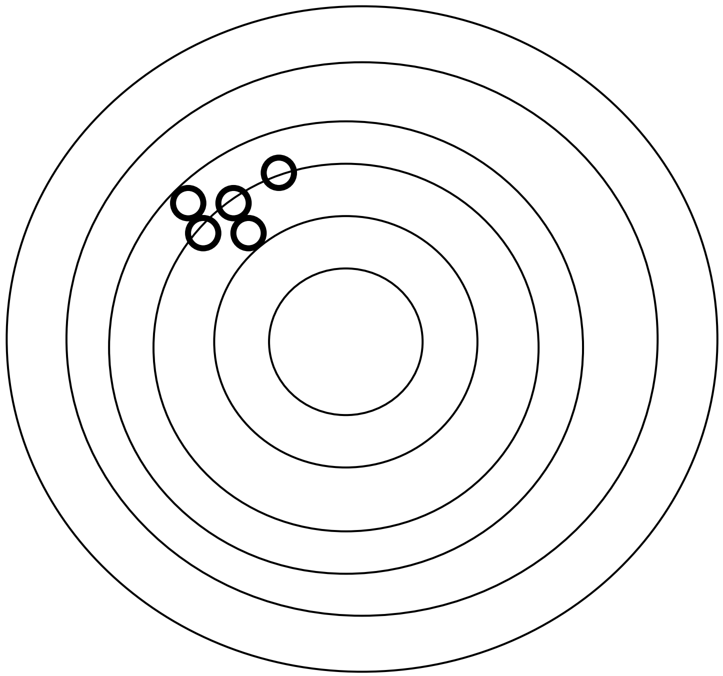
- Der **Scheibenmittelpunkt** symbolisiert den wahren Parameter **p**
- Die **Gewehre** symbolisieren 3 verschiedene **Schätzverfahren**
- Die einzelnen **Einschüsse** symbolisieren die jeweils erzielten **Stichprobenschätzwerte**

Symbolische Darstellung von Erwartungstreue und Minimumvarianz



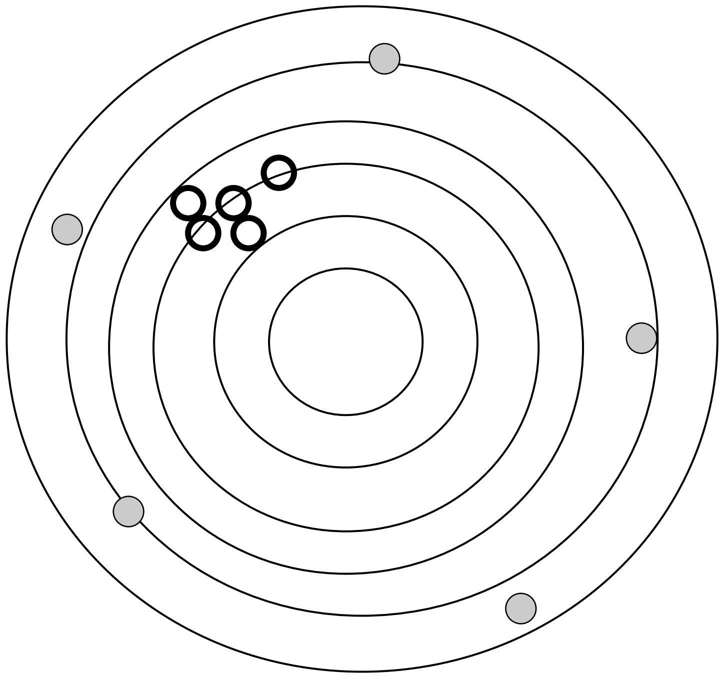
- Gewehr 1
- Gewehr 2
- Gewehr 3

Symbolische Darstellung von Erwartungstreue und Minimumvarianz



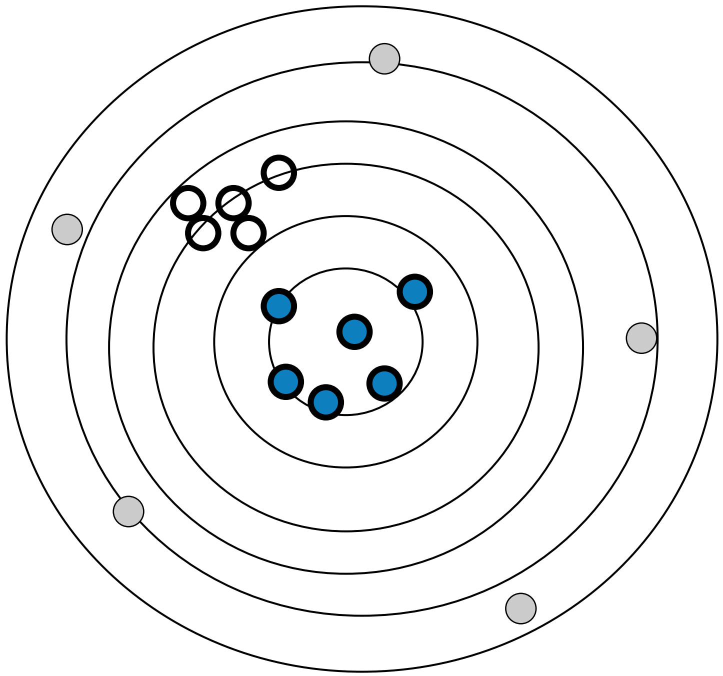
- Gewehr 1:
  - Zeigt die geringsten Schwankungen zwischen den Einschüssen
  - Schiesst aber systematisch daneben
  - → **entspricht Minimumvarianz mit systematischem Schätzfehler**

Symbolische Darstellung von Erwartungstreue und Minimumvarianz



- Gewehr 2:
  - Starke Streuung der Einschüsse
  - Keine systematische Abweichung
  - **→ entspricht erwartungstreuem Schätzverfahren mit grossem zufallsbedingtem Fehler**

Symbolische Darstellung von Erwartungstreue und Minimumvarianz



- Gewehr 3:
  - **→ entspricht relativer Minimumvarianz innerhalb erwartungstreuer Schätzverfahren**

Gemischte lineare Modelle - BLUP

$$\mathbf{y} = \mathbf{Xb} + \mathbf{Zu} + \mathbf{e}$$

Wir sind an den Lösungen für **b** und **u**:

$$\mathrm{BLUP}(\mathbf{a}) = \hat{\mathbf{a}} = \mathbf{GZ'V}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{b}})$$

$$\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{X'V}^{-1}\mathbf{X})\mathbf{X'V}^{-1}\mathbf{y}$$

Um Lösungen zu erhalten, braucht man die $\mathbf{V}^{-1}$ Matrix (Varianz-Kovarianzmatrix der Beobachtungen). Diese ist nicht einfach zu berechnen ….

Mischmodellgleichungen

$$\mathbf{y} = \mathbf{Xb} + \mathbf{Zu} + \mathbf{e}$$

Henderson entwickelte sogenannte Mischmodellgleichungen (Mixed model equations, MME), um Lösungen für b zu schätzen (estimate – fixe Effekte) und Lösungen für u vorherzusagen (predict – zufällige Effekte) ohne Notwendigkeit von V^{-1}

Mischmodellgleichungen

$$\mathbf{y} = \mathbf{Xb} + \mathbf{Zu} + \mathbf{e}$$

Henderson‘s Mixed Model Equations

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'R^{-1}X} & \mathbf{X'R^{-1}Z} \\ \mathbf{Z'R^{-1}X} & \mathbf{Z'R^{-1}Z+G^{-1}} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'R^{-1}y} \\ \mathbf{Z'R^{-1}y} \end{bmatrix}$$

Annahmen:

$$\mathrm{var}(\mathbf{e}) = \mathbf{I}\sigma_e^2 = \mathbf{R}$$

$$\mathrm{var}(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\sigma_u^2 = \mathbf{G}$$

$$\mathrm{cov}(\mathbf{u},\mathbf{e}) = \mathrm{cov}(\mathbf{e},\mathbf{u}) = 0$$

Oftmals wird R^{-1} herausgekürzt:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z+A^{-1}}\lambda \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \frac{\sigma_e^2}{\sigma_u^2}$$

Mischmodellgleichungen

Klassische Lösung der MME :

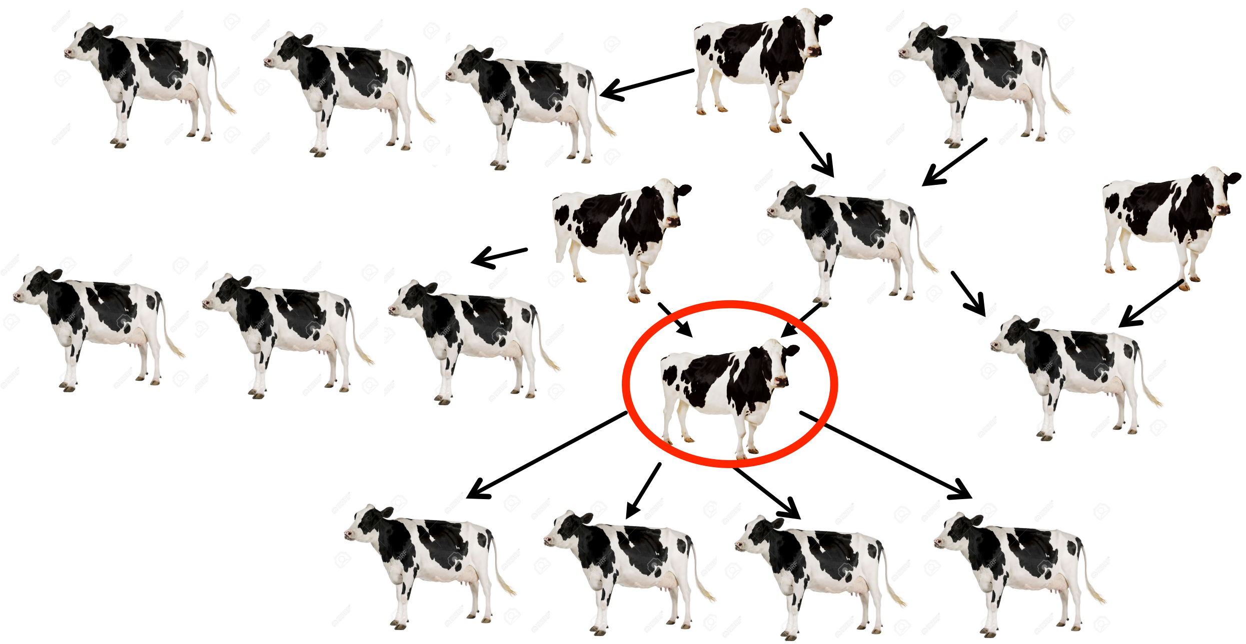
$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{u}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \mathbf{A}^{-1}\lambda \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}$$

Der mittlere Klammerausdruck ist die Inverse der **Koeffizientenmatrix**

In der Praxis liegt in der Invertierung der Koeffizientenmatrix oft ein Problem, da diese sehr gross werden kann. Deshalb kommen bei der Zuchtwertschätzung spezielle Algorithmen zur Anwendung, welche den Lösungsvektor schätzen, ohne die Koeffizientenmatrix zu invertieren (iterative Lösungswege).

Ein Beispiel: BLUP Tiermodell

- Was bedeutet **Tiermodell**?
- Zuchtwerte aller Tiere (Stiere, Kühe, Tiere ohne Leistungen) werden gleichzeitig unter Einbeziehung aller Verwandtschaftsinformationen geschätzt.
- Alle Leistungen von Verwandten sind massgebend



Beispiel: BLUP Tiermodell (Mrode, 2014, p37 ff)

Merkmal: Gewichtszuwachs bis zum Absetzen (Entwöhnung) von Mastkälbern
Kälber werden unter gleichen Managementbedingungen aufgezogen

Kalb	Geschlecht	Vater	Mutter	Zuwachs (kg)
4	M	1	-	4.5
5	W	3	2	2.9
6	W	1	2	3.9
7	M	4	5	3.5
8	M	3	6	5.0

Beispiel: BLUP Tiermodell (Mrode, 2014, p37 ff)

Merkmal: Gewichtszuwachs bis zum Absetzen (Entwöhnung) von Mastrindern

Kalb	Geschlecht	Vater	Mutter	Zuwachs (kg)
4				
5				
6				
7	M	4	5	3.5
8	M	3	6	5.0

Ziel: Schätzen des Effektes des Geschlechts und der Zuchtwerte für alle Tiere

Beispiel: BLUP Tiermodell (Mrode, 2014, p37 ff)

Merkmal: Gewichtszuwachs bis zum Absetzen (Entwöhnung) von Mastrindern

Kalb	Geschl.	Vat.	Mut.	Zuwachs

In der Zuchtwertschätzung wird davon ausgegangen, dass die Varianzkomponenten für das betrachtete Merkmal in der jeweiligen Population bekannt sind (aus vorherigen Varianzkomponenten-Schätzläufen mit z.B. REML- oder Bayes-Schätzverfahren)

Varianzen müssen bekannt sein:

$$\sigma_a^2 = 20$$

$$\sigma_e^2 = 40$$

BLUP Tiermodell

K.	Geschl.	Vat.	Mut.	Zuwachs (kg)
4	M	1	-	4.5
5	W	3	2	2.9
6	W	1	2	3.9
7	M	4	5	3.5
8	M	3	6	5.0

$$y_{ij} = p_i + a_j + e_{ij}$$

i = Geschlecht

j = Kalb

y_{ij} = Zuwachs des Kalbes j mit Geschlecht i

p_i = fixer Effekt des Geschlechts i

a_j = zufälliger Effekt des Kalbes j

e_{ij} = zufälliger Fehler

$$y_{ij} = p_i + a_j + e_{ij}$$

$4.5 = p_1 + a_1 + e_{11}$
$2.9 = p_2 + a_2 + e_{22}$
$3.9 = p_2 + a_3 + e_{23}$
$3.5 = p_1 + a_4 + e_{14}$
$5.0 = p_1 + a_5 + e_{15}$

BLUP Tiermodell

K.	Geschl.	Vat.	Mut.	Zuw. (kg)
4	M	1	-	4.5
5	W	3	2	2.9
6	W	1	2	3.9
7	M	4	5	3.5
8	M	3	6	5.0

Modell nun in Matrixschreibweise

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{b} + \mathbf{Z}\mathbf{a}$$

n = Anzahl Beobachtungen

p = Anzahl Stufen (Fix)

q = Anzahl Stufen (Zufällig)

$\mathbf{y}_{(n \times 1)}$ Anzahl Beobachtungen x 1

$\mathbf{b}_{(p \times 1)}$ Anzahl fixe Stufen x 1

$\mathbf{a}_{(q \times 1)}$ Anzahl zufällige Stufen x 1

$\mathbf{X}_{(n \times p)}$ Anzahl Beobachtungen x fixe Stufen

$\mathbf{Z}_{(n \times q)}$ Anzahl Beobachtungen x zuf. Stufen

X und Z sind Designmatrizen, welche die fixen und zufälligen Effekte den Beobachtungen y zuordnen

BLUP Tiermodell

K.	Geschl.	Vat.	Mut.	Zuw. (kg)
4	M	1	-	4.5
5	W	3	2	2.9
6	W	1	2	3.9
7	M	4	5	3.5
8	M	3	6	5.0

Modell nun in Matrixschreibweise

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{b} + \mathbf{Z}\mathbf{a}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 4.5 \\ 2.9 \\ 3.9 \\ 3.5 \\ 5.0 \end{bmatrix}$$

Vektor mit phänotypischen Beobachtungen

BLUP Tiermodell

K.	Geschl.	Vat.	Mut.	Zuw. (kg)
4	M	1	-	4.5
5	W	3	2	2.9
6	W	1	2	3.9
7	M	4	5	3.5
8	M	3	6	5.0

Modell nun in Matrixschreibweise

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{b} + \mathbf{Z}\mathbf{a}$$

Faktorstufe 1 Faktorstufe 2

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 4.5 \\ 2.9 \\ 3.9 \\ 3.5 \\ 5.0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Designmatrix für fixen Effekt Geschlecht

BLUP Tiermodell

K.	Geschl.	Vat.	Mut.	Zuw. (kg)
4	M	1	-	4.5
5	W	3	2	2.9
6	W	1	2	3.9
7	M	4	5	3.5
8	M	3	6	5.0

Modell nun in Matrixschreibweise

$$\mathbf{y} = \mathbf{Xb} + \mathbf{Za}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 4.5 \\ 2.9 \\ 3.9 \\ 3.5 \\ 5.0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Z} = \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}}^{\text{Kälber und Eltern}} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

BLUP Tiermodell

K.	Geschl.	Vat.	Mut.	Zuw. (kg)
4	M	1	-	4.5
5	W	3	2	2.9
6	W	1	2	3.9
7	M	4	5	3.5
8	M	3	6	5.0

Modell nun in Matrixschreibweise

$$\mathbf{y} = \mathbf{Xb} + \mathbf{Za}$$

Mischmodellgleichung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda\mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}$$

BLUP Tiermodell

K.	Geschl.	Vat.	Mut.	Zuw. (kg)
4	M	1	-	4.5
5	W	3	2	2.9
6	W	1	2	3.9
7	M	4	5	3.5
8	M	3	6	5.0

$$\mathbf{y} = \mathbf{Xb} + \mathbf{Za}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda\mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X'} = ? \qquad \mathbf{X'X} = ?$$

BLUP Tiermodell

K.	Geschl.	Vat.	Mut.	Zuw. (kg)
4	M	1	-	4.5
5	W	3	2	2.9
6	W	1	2	3.9
7	M	4	5	3.5
8	M	3	6	5.0

$$\mathbf{y} = \mathbf{Xb} + \mathbf{Za}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda \mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}$$

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X'Z} = ?$$

BLUP Tiermodell

K.	Geschl.	Vat.	Mut.	Zuw. (kg)
4	M	1	-	4.5
5	W	3	2	2.9
6	W	1	2	3.9
7	M	4	5	3.5
8	M	3	6	5.0

$$\mathbf{y} = \mathbf{Xb} + \mathbf{Za}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda\mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Z'} = ?$$

$$\mathrm{Z'X} = ?$$

BLUP Tiermodell

K.	Geschl.	Vat.	Mut.	Zuw. (kg)
4	M	1	-	4.5
5	W	3	2	2.9
6	W	1	2	3.9
7	M	4	5	3.5
8	M	3	6	5.0

$$\mathbf{y} = \mathbf{Xb} + \mathbf{Za}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda \mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}$$

$$Z' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\quad \mathbf{Z'Z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

BLUP Tiermodell

K.	Geschl.	Vat.	Mut.	Zuw. (kg)
4	M	1	-	4.5
5	W	3	2	2.9
6	W	1	2	3.9
7	M	4	5	3.5
8	M	3	6	5.0

$$\mathbf{y} = \mathbf{Xb} + \mathbf{Za}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda\mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}$$

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Z' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 4.5 \\ 2.9 \\ 3.9 \\ 3.5 \\ 5.0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{X'y} = ?$$

$$\mathrm{Z'y} = ?$$

BLUP Tiermodell

K.	Geschl.	Vat.	Mut.	Zuw. (kg)
4	M	1	-	4.5
5	W	3	2	2.9
6	W	1	2	3.9
7	M	4	5	3.5
8	M	3	6	5.0

$$\mathbf{y} = \mathbf{Xb} + \mathbf{Za}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda\mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X'X} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X'Z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z'X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z'Z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

BLUP Tiermodell

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda \mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}_{1.\text{Männlich}} \\ \hat{b}_{2,\text{Weiblich}} \\ \hat{a}_{\text{Tier1}} \\ \hat{a}_{\text{Tier2}} \\ \hat{a}_{\text{Tier3}} \\ \hat{a}_{\text{Tier4}} \\ \hat{a}_{\text{Tier5}} \\ \hat{a}_{\text{Tier6}} \\ \hat{a}_{\text{Tier7}} \\ \hat{a}_{\text{Tier8}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 13.0 \\ 6.8 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4.5 \\ 2.9 \\ 3.9 \\ 3.5 \\ 5.0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

BLUP Tiermodell

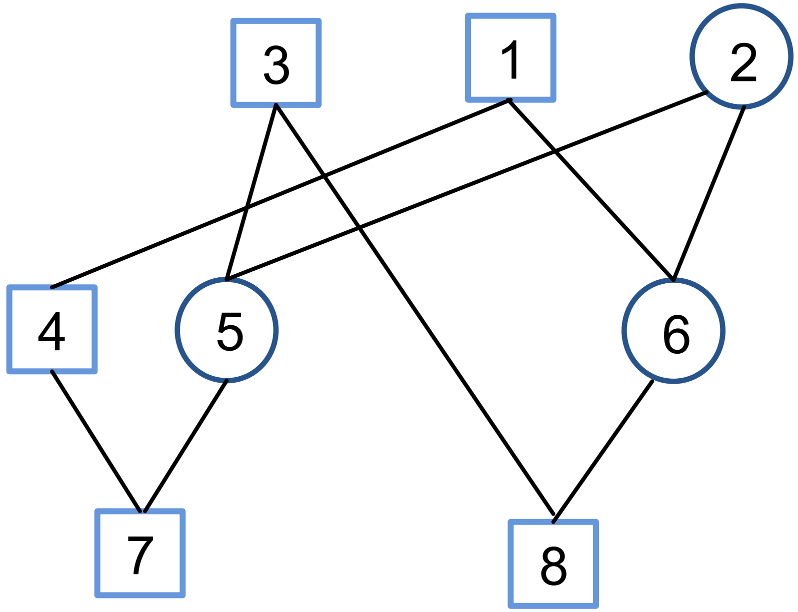
$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda\mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}_{1.\text{Männlich}} \\ \hat{b}_{2,\text{Weiblich}} \\ \hat{a}_{\text{Tier1}} \\ \hat{a}_{\text{Tier2}} \\ \hat{a}_{\text{Tier3}} \\ \hat{a}_{\text{Tier4}} \\ \hat{a}_{\text{Tier5}} \\ \hat{a}_{\text{Tier6}} \\ \hat{a}_{\text{Tier7}} \\ \hat{a}_{\text{Tier8}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 13.0 \\ 6.8 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4.5 \\ 2.9 \\ 3.9 \\ 3.5 \\ 5.0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

BLUP Tiermodell

- Inverse der additiv genetischen Verwandtschaftsmatrix muss aufgestellt werden

- Erinnerung: verschiedene Methoden – bei grossen Datensätzen muss Inverse direkt aufgestellt werden!



BLUP Tiermodell

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda \mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1.833 & 0.500 & 0.000 & -0.667 & 0.000 & -1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.500 & 2.000 & 0.500 & 0.000 & -1.000 & -1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.500 & 2.000 & 0.000 & -1.000 & 0.500 & 0.000 & -1.000 \\ -0.667 & 0.000 & 0.000 & 1.833 & 0.500 & 0.000 & -1.000 & 0.000 \\ 0.000 & -1.000 & -1.000 & 0.500 & 2.500 & 0.000 & -1.000 & 0.000 \\ -1.000 & -1.000 & 0.500 & 0.000 & 0.000 & 2.500 & 0.000 & -1.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -1.000 & -1.000 & 0.000 & 2.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -1.000 & 0.000 & 0.000 & -1.000 & 0.000 & 2.000 \end{bmatrix}$$

BLUP Tiermodell

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda \mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1.833 & 0.500 & 0.000 & -0.667 & 0.000 & -1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.500 & 2.000 & 0.500 & 0.000 & -1.000 & -1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.500 & 2.000 & 0.000 & -1.000 & 0.500 & 0.000 & -1.000 \\ -0.667 & 0.000 & 0.000 & 1.833 & 0.500 & 0.000 & -1.000 & 0.000 \\ 0.000 & -1.000 & -1.000 & 0.500 & 2.500 & 0.000 & -1.000 & 0.000 \\ -1.000 & -1.000 & 0.500 & 0.000 & 0.000 & 2.500 & 0.000 & -1.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -1.000 & -1.000 & 0.000 & 2.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -1.000 & 0.000 & 0.000 & -1.000 & 0.000 & 2.000 \end{bmatrix}$$

BLUP Tiermodell

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda \mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1.833 & 0.500 & 0.000 & -0.667 & 0.000 & -1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.500 & 2.000 & 0.500 & 0.000 & -1.000 & -1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.500 & 2.000 & 0.000 & -1.000 & 0.500 & 0.000 & -1.000 \\ -0.667 & 0.000 & 0.000 & 1.833 & 0.500 & 0.000 & -1.000 & 0.000 \\ 0.000 & -1.000 & -1.000 & 0.500 & 2.500 & 0.000 & -1.000 & 0.000 \\ -1.000 & -1.000 & 0.500 & 0.000 & 0.000 & 2.500 & 0.000 & -1.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -1.000 & -1.000 & 0.000 & 2.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -1.000 & 0.000 & 0.000 & -1.000 & 0.000 & 2.000 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \frac{\sigma_e^2}{\sigma_a^2} = \frac{40}{20} = 2$$

Varianzen müssen bekannt sein!

BLUP Tiermodell

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda\mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}$$

$$\lambda A^{-1} = \begin{bmatrix} 3.666 & 1.000 & 0.000 & -1.334 & 0.000 & -2.000 & 0.000 & 0.000 \\ 1.000 & 4.000 & 1.000 & 0.000 & -2.000 & -2.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 & 4.000 & 0.000 & -2.000 & 1.000 & 0.000 & -2.000 \\ -1.334 & 0.000 & 0.000 & 3.666 & 1.000 & 0.000 & -2.000 & 0.000 \\ 0.000 & -2.000 & -2.000 & 1.000 & 5.000 & 0.000 & -2.000 & 0.000 \\ -2.000 & -2.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 & 5.000 & 0.000 & -2.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -2.000 & -2.000 & 0.000 & 4.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -2.000 & 0.000 & 0.000 & -2.000 & 0.000 & 4.000 \end{bmatrix}$$

BLUP Tiermodell

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda\mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}$$

$$\lambda A^{-1} = \begin{bmatrix} 3.666 & 1.000 & 0.000 & -1.334 & 0.000 & -2.000 & 0.000 & 0.000 \\ 1.000 & 4.000 & 1.000 & 0.000 & -2.000 & -2.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 & 4.000 & 0.000 & -2.000 & 1.000 & 0.000 & -2.000 \\ -1.334 & 0.000 & 0.000 & 3.666 & 1.000 & 0.000 & -2.000 & 0.000 \\ 0.000 & -2.000 & -2.000 & 1.000 & 5.000 & 0.000 & -2.000 & 0.000 \\ -2.000 & -2.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 & 5.000 & 0.000 & -2.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -2.000 & -2.000 & 0.000 & 4.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -2.000 & 0.000 & 0.000 & -2.000 & 0.000 & 4.000 \end{bmatrix}$$

BLUP Tiermodell

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda \mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Z'Z} + \lambda \mathrm{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3.666 & 1.000 & 0.000 & -1.334 & 0.000 & -2.000 & 0.000 & 0.000 \\ 1.000 & 4.000 & 1.000 & 0.000 & -2.000 & -2.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 & 4.000 & 0.000 & -2.000 & 1.000 & 0.000 & -2.000 \\ -1.334 & 0.000 & 0.000 & 4.666 & 1.000 & 0.000 & -2.000 & 0.000 \\ 0.000 & -2.000 & -2.000 & 1.000 & 6.000 & 0.000 & -2.000 & 0.000 \\ -2.000 & -2.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 & 6.000 & 0.000 & -2.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -2.000 & -2.000 & 0.000 & 5.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -2.000 & 0.000 & 0.000 & -2.000 & 0.000 & 5.000 \end{bmatrix}$$

BLUP Tiermodell

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda\mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3.666 & 1.000 & 0.000 & -1.334 & 0.000 & -2.000 & 0.000 & 0.000 \\ 1.000 & 4.000 & 1.000 & 0.000 & -2.000 & -2.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 & 4.000 & 0.000 & -2.000 & 1.000 & 0.000 & -2.000 \\ -1.334 & 0.000 & 0.000 & 4.666 & 1.000 & 0.000 & -2.000 & 0.000 \\ 0.000 & -2.000 & -2.000 & 1.000 & 6.000 & 0.000 & -2.000 & 0.000 \\ -2.000 & -2.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 & 6.000 & 0.000 & -2.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -2.000 & -2.000 & 0.000 & 5.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -2.000 & 0.000 & 0.000 & -2.000 & 0.000 & 5.000 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \\ \hat{a}_5 \\ \hat{a}_6 \\ \hat{a}_7 \\ \hat{a}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 13.0 \\ 6.8 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4.5 \\ 2.9 \\ 3.9 \\ 3.5 \\ 5.0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

BLUP Tiermodell

$$
\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda \mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \\ \hat{a}_5 \\ \hat{a}_6 \\ \hat{a}_7 \\ \hat{a}_8 \end{bmatrix} =
\left[\begin{array}{cc|cccccccc}
3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 3.666 & 1.000 & 0.000 & -1.334 & 0.000 & -2.000 & 0.000 & 0.000 \\
0 & 0 & 1.000 & 4.000 & 1.000 & 0.000 & -2.000 & -2.000 & 0.000 & 0.000 \\
0 & 0 & 0.000 & 1.000 & 4.000 & 0.000 & -2.000 & 1.000 & 0.000 & -2.000 \\
1 & 0 & -1.334 & 0.000 & 0.000 & 4.666 & 1.000 & 0.000 & -2.000 & 0.000 \\
0 & 1 & 0.000 & -2.000 & -2.000 & 1.000 & 6.000 & 0.000 & -2.000 & 0.000 \\
0 & 1 & -2.000 & -2.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 & 6.000 & 0.000 & -2.000 \\
1 & 0 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -2.000 & -2.000 & 0.000 & 5.000 & 0.000 \\
1 & 0 & 0.000 & 0.000 & -2.000 & 0.000 & 0.000 & -2.000 & 0.000 & 5.000
\end{array}\right]^{-1}
\begin{bmatrix} 13.0 \\ 6.8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4.5 \\ 2.9 \\ 3.9 \\ 3.5 \\ 5.0 \end{bmatrix}
$$

BLUP Tiermodell

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda \mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \\ \hat{a}_5 \\ \hat{a}_6 \\ \hat{a}_7 \\ \hat{a}_8 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3.666 & 1.000 & 0.000 & -1.334 & 0.000 & -2.000 & 0.000 & 0.000 \\ 1.000 & 4.000 & 1.000 & 0.000 & -2.000 & -2.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 & 4.000 & 0.000 & -2.000 & 1.000 & 0.000 & -2.000 \\ -1.334 & 0.000 & 0.000 & 4.666 & 1.000 & 0.000 & -2.000 & 0.000 \\ 0.000 & -2.000 & -2.000 & 1.000 & 6.000 & 0.000 & -2.000 & 0.000 \\ -2.000 & -2.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 & 6.000 & 0.000 & -2.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -2.000 & -2.000 & 0.000 & 5.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -2.000 & 0.000 & 0.000 & -2.000 & 0.000 & 5.000 \end{bmatrix} \end{array}\right]^{-1} \begin{bmatrix} 13.0 \\ 6.8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4.5 \\ 2.9 \\ 3.9 \\ 3.5 \\ 5.0 \end{bmatrix}$$

BLUP Tiermodell

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda\mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'y \\ Z'y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \\ \hat{a}_5 \\ \hat{a}_6 \\ \hat{a}_7 \\ \hat{a}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.666 & 1.000 & 0.000 & -1.334 & 0.000 & -2.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0 & 0 & 1.000 & 4.000 & 1.000 & 0.000 & -2.000 & -2.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0 & 0 & 0.000 & 1.000 & 4.000 & 0.000 & -2.000 & 1.000 & 0.000 & -2.000 \\ 1 & 0 & 1.334 & 0.000 & 0.000 & 4.666 & 1.000 & 0.000 & -2.000 & 0.000 \\ 0 & 1 & 0.000 & -2.000 & -2.000 & 1.000 & 6.000 & 0.000 & -2.000 & 0.000 \\ 0 & 1 & -2.000 & -2.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 & 6.000 & 0.000 & -2.000 \\ 1 & 0 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -2.000 & -2.000 & 0.000 & 5.000 & 0.000 \\ 1 & 0 & 0.000 & 0.000 & -2.000 & 0.000 & 0.000 & -2.000 & 0.000 & 5.000 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 13.0 \\ 6.8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4.5 \\ 2.9 \\ 3.9 \\ 3.5 \\ 5.0 \end{bmatrix}$$

BLUP Tiermodell – Lösung der MME

$$\begin{bmatrix} \hat{b}_{1.\text{Männlich}} \\ \hat{b}_{2,\text{Weiblich}} \\ \hat{a}_{\text{Tier}1} \\ \hat{a}_{\text{Tier}2} \\ \hat{a}_{\text{Tier}3} \\ \hat{a}_{\text{Tier}4} \\ \hat{a}_{\text{Tier}5} \\ \hat{a}_{\text{Tier}6} \\ \hat{a}_{\text{Tier}7} \\ \hat{a}_{\text{Tier}8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.358 \\ 3.404 \\ 0.098 \\ -0.019 \\ -0.041 \\ -0.009 \\ -0.186 \\ 0.177 \\ -0.249 \\ 0.183 \end{bmatrix}$$

BLUE Schätzer für die Faktorstufen des fixen Effektes Geschlecht

BLUP Schätzer für den zufälligen Tiereffekt = Zuchtwert

BLUP Tiermodell – Lösung der MME

$$
\begin{bmatrix} \hat{b}_{1.\text{Männlich}} \\ \hat{b}_{2,\text{Weiblich}} \\ \hat{a}_{\text{Tier}1} \\ \hat{a}_{\text{Tier}2} \\ \hat{a}_{\text{Tier}3} \\ \hat{a}_{\text{Tier}4} \\ \hat{a}_{\text{Tier}5} \\ \hat{a}_{\text{Tier}6} \\ \hat{a}_{\text{Tier}7} \\ \hat{a}_{\text{Tier}8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.358 \\ 3.404 \\ 0.098 \\ -0.019 \\ -0.041 \\ -0.009 \\ -0.186 \\ 0.177 \\ -0.249 \\ 0.183 \end{bmatrix}
$$

Männliche Kälber wachsen schneller als Weibliche

Obwohl wir keine Beobachtung für Tiere 1 bis 3 hatten, haben sie trotzdem Zuchtwerte

BLUP Tiermodell

Kalb	Geschl.	Vater	Mutter	Zuchtwert	Rang
8	M	3	6	0.183	1
6	W	1	2	0.177	2
1	M	-	-	0.098	3
4	M	1	-	-0.009	4
2	W	-	-	-0.019	5
3	M	-	-	-0.041	6
5	W	3	2	-0.186	7
7	M	4	5	-0.249	8

BLUP Tiermodell geschafft ☺

$$\begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z+\lambda A^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'y \\ Z'y \end{bmatrix}$$