ETH zürich

Zuchtwertschätzung mit Best Linear Unbiased Prediction Verfahren

Birgit Gredler-Grandl

Korrektur Folien 6.11.2015

Mischmodellgleichung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda\mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}$$

- Um dieses Gleichungssystem zu lösen, muss die Koeffizientenmatrix auf die rechte Seite gebracht werden

BLUP Tiermodell

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda \mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \\ \hat{a}_5 \\ \hat{a}_6 \\ \hat{a}_7 \\ \hat{a}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13.0 \\ 6.8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.666 & 1.000 & 0.000 & -1.334 & 0.000 & -2.000 & 0.000 & 0.000 \\ 1.000 & 4.000 & 1.000 & 0.000 & -2.000 & -2.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 & 4.000 & 0.000 & -2.000 & 1.000 & 0.000 & -2.000 \\ -1.334 & 0.000 & 0.000 & 4.666 & 1.000 & 0.000 & -2.000 & 0.000 \\ 0.000 & -2.000 & -2.000 & 1.000 & 6.000 & 0.000 & -2.000 & 0.000 \\ -2.000 & -2.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 & 6.000 & 0.000 & -2.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -2.000 & -2.000 & 0.000 & 5.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -2.000 & 0.000 & 0.000 & -2.000 & 0.000 & 5.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4.5 \\ 2.9 \\ 3.9 \\ 3.5 \\ 5.0 \end{bmatrix}$$

BLUP Tiermodell

$$\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{b}}\\ \hat{\mathbf{a}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{X'y}\\ \mathbf{Z'y}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z}\\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z}+\lambda\mathbf{A}^{-1}\end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix}\hat{b}_1\\ \hat{b}_2\\ \hat{a}_1\\ \hat{a}_2\\ \hat{a}_3\\ \hat{a}_4\\ \hat{a}_5\\ \hat{a}_6\\ \hat{a}_7\\ \hat{a}_8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}13.0\\ 6.8\\ \hline 0\\ 0\\ 0\\ 4.5\\ 2.9\\ 3.9\\ 3.5\\ 5.0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\\ \hline 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ \hline 3.666 & 1.000 & 0.000 & -1.334 & 0.000 & -2.000 & 0.000 & 0.000\\ 1.000 & 4.000 & 1.000 & 0.000 & -2.000 & -2.000 & 0.000 & 0.000\\ 0.000 & 1.000 & 4.000 & 0.000 & -2.000 & 1.000 & 0.000 & -2.000\\ -1.334 & 0.000 & 0.000 & 4.666 & 1.000 & 0.000 & -2.000 & 0.000\\ 0.000 & -2.000 & -2.000 & 1.000 & 6.000 & 0.000 & -2.000 & 0.000\\ -2.000 & -2.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 & 6.000 & 0.000 & -2.000\\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -2.000 & -2.000 & 0.000 & 5.000 & 0.000\\ 0.000 & 0.000 & -2.000 & 0.000 & 0.000 & -2.000 & 0.000 & 5.000\end{bmatrix}^{-1}$$

Korrektur Folien 6.11.2015

- Allgemein: Lösen von Gleichungssystemen

$$4 * b_1 + 12 * b_2 = 14$$
$$9 * b_1 - 10 * b_2 = -18$$

- Dieses Gleichungssystem in Matrixschreibweise:

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 9 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -18 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{y}$$

Korrektur Folien 6.11.2015

- Die Lösung erhält man, indem beide Seiten der Gleichung mit der Inversen von A multipliziert werden

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{y}$$

$$\mathbf{A}^{-1} A \mathbf{b} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y}$$

$$\mathbf{A}^{-1} A = I$$

= **Einheitsmatrix**

$$I \mathbf{b} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y}$$

Korrektur Folien 6.11.2015

Mischmodellgleichung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda\mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda\mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathrm{X'y} \\ \mathrm{Z'y} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB \neq BA!!!}$$

$$\cancel{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda\mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix}^{-1}}$$

Heutige Vorlesung

- **Sicherheit und Genauigkeit der BLUP-Zuchtwerte**

- **Verschiedene BLUP Modelle für die Zuchtwertschätzung**
  - Zuchtwerte schätzen mit einem
    - **BLUP Vatermodell**
    - **BLUP Mehrmerkmalsmodell**

Bei der Zuchtwertschätzung werden umfangreiche Gleichungssysteme mit der Matrix Algebra gelöst…

Kenntnisse der Algebra der Matrizen Voraussetzung !

$$\begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + \lambda A^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'y \\ Z'y \end{bmatrix}$$

Heutige Vorlesung

- **Sicherheit und Genauigkeit der BLUP-Zuchtwerte**

- **Verschiedene BLUP Modelle für die Zuchtwertschätzung**
  - Zuchtwerte schätzen mit einem **BLUP Vatermodell**

Sicherheit und Genauigkeit von Zuchtwerten

- Zuchtwerte stellen **Schätzwerte** für die wahren Zuchtwerte dar (vorausgesagt: BLUP → Prediction)
- Der Zuchtwert ist deshalb immer mit **Fehler** behaftet
- Ein geschätzter Zuchtwert ist der **wahrscheinlichste**, im **Durchschnitt zu erwartende Wert**
- Die **Sicherheit bzw. Genauigkeit** sind Masse für die **Zuverlässigkeit** bzw. **Qualität** von Zuchtwerten (bzw. der Zuchtwertschätzung)

Sicherheit und Genauigkeit von Zuchtwerten

Genauigkeit
(*engl. accuracy*)
Korrelation zwischen wahrem und geschätztem Zuchtwert
r ($r_{a,\hat{a}}$)

Sicherheit
(*engl. reliability*)
Genauigkeit quadriert
r^2 ($r^2_{a,\hat{a}}$)
statistisch: Bestimmtheitsmass (B%)
Werte zwischen 0 und 1 (keine Einheit)

Sicherheit und Genauigkeit von Zuchtwerten

- Die Sicherheit hängt ab:
  - Heritabilität (Erblichkeit) des Merkmals
  - Umfang und Qualität der Informationen für die Zuchtwertschätzung
    - Vorfahrenleistung, Eigenleistung, Leistungen von Geschwistern und Nachkommen, etc ...
- z.B. Rinderzucht:
  - Sicherheit für Stiere mit publizierten Zuchtwert Milch: zw. 60 und 99%
  - Fitnessmerkmale mit niedriger Heritabilität deutlich niedrigere Sicherheit (→ mehr Informationsquellen notwendig um gl. Sicherheit zu erlangen)

Sicherheit für ausgewählte Situationen (Willam und Simianer, 2011, p184)

Informationsquelle		$r_{a,\hat{a}}$
Vorfahren	1 Elter	0.5 h
	1 Grosselter	0.25 h
	1 Urgrosselter	0.125 h
Eigenleistung	1 Eigenleistung	h
Vollgeschwister	1 Vollgeschwister	0.5 h
Halbgeschwister	1 Halbgeschwister	0.25 h
Nachkommen	1 Nachkomme	0.5 h

Leistungen von verwandten Tieren sind weniger informativ als Eigenleistungen und werden deshalb mit dem Verwandtschaftskoeffizienten gewichtet.

Sicherheit und Genauigkeit von Zuchtwerten

BEVERINO

Produktion

GA HO 08.15	Anz.Töchter			**Kappa Kasein:**	**AB**
				Beta Kasein:	
SICHERHEIT	Milch kg	Fett		Eiweiss	
66	**+700**	kg	**+44**	kg	**+31**
		%	**+0.19**	%	**+0.09**

Quelle: http://www.swissgenetics.ch/Red-Holstein.155.0.html?&tx_nmstierendbfrontend_pi[removeallfilters]=1

Sicherheit und Genauigkeit von Zuchtwerten

BEVERINO

Produktion

GA HO 08.15	Anz.Töchter			**Kappa Kasein:**	**AB**
				Beta Kasein:	
SICHERHEIT	Milch kg	Fett		Eiweiss	
66	**+700**	kg	**+44**	kg	**+31**
		%	**+0.19**	%	**+0.09**

REDBULL

Produktion

G HO 08.15	Anz.Töchter 61			**Kappa Kasein:**	**AB**
				Beta Kasein:	
SICHERHEIT	Milch kg	Fett		Eiweiss	
87	**-89**	kg	**-20**	kg	**+15**
		%	**-0.20**	%	**+0.22**

Quelle: http://www.swissgenetics.ch/Red-Holstein.155.0.html?&tx_nmstierendbfrontend_pi[removeallfilters]=1

Sicherheit und Genauigkeit von Zuchtwerten

DELAGO

Produktion

G HO 08.15	Anz.Töchter 4658			**Kappa Kasein:**	**AA**
				Beta Kasein:	
SICHERHEIT	Milch kg	Fett		Eiweiss	
99	**-445**	kg	**+6**	kg	**-12**
		%	**+0.29**	%	**+0.03**

Quelle: http://www.swissgenetics.ch/Red-Holstein.155.0.html?&tx_nmstierendbfrontend_pi[removeallfilters]=1

Bedeutung der Sicherheit

- Die Bedeutung der Sicherheit der Zuchtwertschätzung ist je nach Tierart und Züchtern unterschiedlich.
- Grundsätzlich ist eine hohe Sicherheit der Zuchtwerte einer niedrigen Sicherheit vorzuziehen.
- Aber: Theoretisch wird der maximale Zuchtfortschritt dann erreicht, wenn die Tiere mit den höchsten geschätzten Zuchtwerten selektiert werden.
- Die Sicherheit ist von grosser Bedeutung wenn der Risikoaspekt in betriebswirtschaftlichen Entscheidungen im Vordergrund steht (Besamungsstationen, Zuchtverbände)

Wie wird die Sicherheit berechnet?

Henderson (1975) zeigte, dass die Sicherheit eine Funktion der Inversen der Koeffizientenmatrix der MME ist.

Hendersons Mischmodellgleichungen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda\mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}$$

Wie wird die Sicherheit berechnet?

Henderson (1975) zeigte, dass die Sicherheit eine Funktion der Inversen der Koeffizientenmatrix der MME ist.

Hendersons Mischmodellgleichungen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda\mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}$$

Koeffizientenmatrix der MME

Wie wird die Sicherheit berechnet?

Henderson (1975) zeigte, dass die Sicherheit eine Funktion der Inversen der Koeffizientenmatrix der MME ist.

Hendersons Mischmodellgleichungen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda \mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix}$$

Inverse: $\begin{bmatrix} \mathbf{C}^{11} & \mathbf{C}^{12} \\ \mathbf{C}^{21} & \mathbf{C}^{22} \end{bmatrix}$

Wie wird die Sicherheit berechnet?

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda\mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathrm{X'y} \\ \mathrm{Z'y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \mathbf{A}^{-1}\lambda \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{11} & \mathbf{C}^{12} \\ \mathbf{C}^{21} & \mathbf{C}^{22} \end{bmatrix}$$

Wie wird die Sicherheit berechnet?

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda\mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathrm{X'y} \\ \mathrm{Z'y} \end{bmatrix}$$

Inverse

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \mathbf{A}^{-1}\lambda \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{11} & \mathbf{C}^{12} \\ \mathbf{C}^{21} & \mathbf{C}^{22} \end{bmatrix}$$

Wie wird die Sicherheit berechnet?

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda \mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathrm{X'y} \\ \mathrm{Z'y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \mathbf{A}^{-1}\lambda \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{11} & \mathbf{C}^{12} \\ \mathbf{C}^{21} & \mathbf{C}^{22} \end{bmatrix}$$

Wie wird die Sicherheit berechnet?

Es gilt: $\mathrm{var}(a - \hat{a}) = C^{22}$

- Dieser Ausdruck wird im Englischen als **Prediction Error Variance (PEV)** bezeichnet (Varianz des Schätzfehlers).

$$PEV = \mathrm{var}(a - \hat{a}) = C^{22}\sigma_e^2$$

- Gibt den Anteil der additiv genetischen Varianz an, der **noch nicht** durch die Zuchtwertschätzung (Modell) erklärt wird:

$$PEV = \mathrm{var}(a - \hat{a}) = C^{22}\sigma_e^2 = (1 - r^2)\sigma_a^2$$

- r^2 = quadrierte Korrelation zwischen wahrem und geschätztem Zuchtwert

Wie wird die Sicherheit berechnet?

$$PEV = \mathrm{var}(a - \hat{a}) = C^{22}\sigma_e^2 = (1 - r^2)\sigma_a^2$$

Diagonalelemente in C^{22}

$$d_i\sigma_e^2 = (1 - r^2)\sigma_a^2$$

d_i = Diagonalelement für Tier i in C^{22}

$$d_i\sigma_e^2 / \sigma_a^2 = 1 - r^2$$

nach r^2 auflösen

$$\lambda = \frac{\sigma_e^2}{\sigma_a^2}$$

$$\boxed{r^2 = 1 - d_i\lambda}$$

Beispiel: BLUP Tiermodell (Mrode, 2014, p37 ff)

Merkmal: Gewichtszuwachs bis zum Absetzen (Entwöhnung) von Mastkälbern
Kälber werden unter gleichen Managementbedingungen aufgezogen

Kalb	Geschlecht	Vater	Mutter	Zuwachs (kg)
4	M	1	-	4.5
5	W	3	2	2.9
6	W	1	2	3.9
7	M	4	5	3.5
8	M	3	6	5.0

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda \mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \\ \hat{a}_5 \\ \hat{a}_6 \\ \hat{a}_7 \\ \hat{a}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.666 & 1.000 & 0.000 & -1.334 & 0.000 & -2.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0 & 0 & 1.000 & 4.000 & 1.000 & 0.000 & -2.000 & -2.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0 & 0 & 0.000 & 1.000 & 4.000 & 0.000 & -2.000 & 1.000 & 0.000 & -2.000 \\ 1 & 0 & 1.334 & 0.000 & 0.000 & 4.666 & 1.000 & 0.000 & -2.000 & 0.000 \\ 0 & 1 & 0.000 & -2.000 & -2.000 & 1.000 & 6.000 & 0.000 & -2.000 & 0.000 \\ 0 & 1 & -2.000 & -2.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 & 6.000 & 0.000 & -2.000 \\ 1 & 0 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -2.000 & -2.000 & 0.000 & 5.000 & 0.000 \\ 1 & 0 & 0.000 & 0.000 & -2.000 & 0.000 & 0.000 & -2.000 & 0.000 & 5.000 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 13.0 \\ 6.8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4.5 \\ 2.9 \\ 3.9 \\ 3.5 \\ 5.0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \mathbf{A}^{-1}\lambda \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{11} & \mathbf{C}^{12} \\ \mathbf{C}^{21} & \mathbf{C}^{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \\ \hat{a}_5 \\ \hat{a}_6 \\ \hat{a}_7 \\ \hat{a}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.666 & 1.000 & 0.000 & -1.334 & 0.000 & -2.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0 & 0 & 1.000 & 4.000 & 1.000 & 0.000 & -2.000 & -2.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0 & 0 & 0.000 & 1.000 & 4.000 & 0.000 & -2.000 & 1.000 & 0.000 & -2.000 \\ 1 & 0 & 1.334 & 0.000 & 0.000 & 4.666 & 1.000 & 0.000 & -2.000 & 0.000 \\ 0 & 1 & 0.000 & -2.000 & -2.000 & 1.000 & 6.000 & 0.000 & -2.000 & 0.000 \\ 0 & 1 & -2.000 & -2.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 & 6.000 & 0.000 & -2.000 \\ 1 & 0 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -2.000 & -2.000 & 0.000 & 5.000 & 0.000 \\ 1 & 0 & 0.000 & 0.000 & -2.000 & 0.000 & 0.000 & -2.000 & 0.000 & 5.000 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 13.0 \\ 6.8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4.5 \\ 2.9 \\ 3.9 \\ 3.5 \\ 5.0 \end{bmatrix}$$

Inverse der Koeffizientenmatrix (Mrode, p. 51)

Diagonalelemente von C^{22}

$$\begin{bmatrix}
0.596 & 0.157 & -0.164 & -0.084 & -0.131 & -0.265 & -0.148 & -0.166 & -0.284 & -0.238 \\
0.157 & 0.802 & -0.133 & -0.241 & -0.112 & -0.087 & -0.299 & -0.306 & -0.186 & -0.199 \\
-0.164 & -0.133 & \boxed{0.471} & 0.007 & 0.033 & 0.220 & 0.045 & 0.221 & 0.139 & 0.134 \\
-0.084 & -0.241 & 0.007 & \boxed{0.492} & -0.010 & 0.020 & 0.237 & 0.245 & 0.120 & 0.111 \\
-0.131 & -0.112 & 0.033 & -0.010 & \boxed{0.456} & 0.048 & 0.201 & 0.023 & 0.126 & 0.218 \\
-0.265 & -0.087 & 0.220 & 0.020 & 0.048 & \boxed{0.428} & 0.047 & 0.128 & 0.243 & 0.123 \\
-0.148 & -0.299 & 0.045 & 0.237 & 0.201 & 0.047 & \boxed{0.428} & 0.170 & 0.220 & 0.178 \\
-0.166 & -0.306 & 0.221 & 0.245 & 0.023 & 0.128 & 0.170 & \boxed{0.442} & 0.152 & 0.219 \\
-0.284 & -0.186 & 0.139 & 0.120 & 0.126 & 0.243 & 0.220 & 0.152 & \boxed{0.442} & 0.168 \\
-0.238 & -0.199 & 0.134 & 0.111 & 0.218 & 0.123 & 0.178 & 0.219 & 0.168 & \boxed{0.422}
\end{bmatrix}$$

Berechnung Sicherheit (Mrode, p. 52)

$$r^2 = 1 - d_i \lambda$$

Tier	Diagonalelement C^{22}	r^2	r
1	0.471		
2	0.492		
3	0.456		
4	0.428		
5	0.428		
6	0.442		
7	0.442		
8	0.422		

Heutige Vorlesung

- **Sicherheit und Genauigkeit der BLUP-Zuchtwerte**

- **Verschiedene BLUP Modelle für die Zuchtwertschätzung**
- Zuchtwerte schätzen mit einem **BLUP Vatermodell**

Verschiedene Modelle der BLUP Zuchtwertschätzung

- Nach **Informationsquellen** bzw. **Verwandtschaftsstruktur**
  - BLUP Vatermodell
  - BLUP Tiermodell

- **Ein**-Merkmal- vs. **Mehr**-Merkmal-Modelle
  - Ein-Merkmal-Modell – Zuchtwerte werden univariat gschätzt
  - Wiederholbarkeitsmodelle (wiederholte Leistung)
  - Mehr-Merkmal-Modell – Zuchtwerte werden multivariat geschätzt
- ....

BLUP Vatermodell (Sire model)

- **Historisch** wurden vor dem Tiermodell zunächst Modelle verwendet, welche **nur** die **Väter** berücksichtigen
- → **Fehlende Computertechnik**
- Erste Routinezuchtwertschätzungen mittels BLUP wurden in Amerika für Milchmerkmale bei der Rasse Holstein Friesian durchgeführt (etwa 1980)
- Diese wurden mit einem sogenannten **Vatermodell** durchgeführt.

BLUP Vatermodell (Sire model)

- Vatermodell: als **genetischer Effekt** auf die Leistung wird **nur** der **additiv genetische Effekt des Vaters** modelliert.
- → Es werden daher aber **nur Zuchtwerte für die Väter** geschätzt (nicht für alle Tiere wie im Tiermodell)
- **Verwandtschaften zwischen** den **Vätern** werden allerdings **berücksichtigt**.
- Rechentechnischer **Vorteil** - kleineres Gleichungssystem
- **Nachteil**: Ein Teil des Zuchtwertes eines Tieres – der Effekt der Mutter - wird nicht berücksichtigt, Leistung von Nachkommen weiblicher Tiere werden nicht berücksichtigt (ungenauer)

BLUP Tiermodell (Animal model)

- Vatermodell wurde von **Tiermodell** abgelöst
- Für jede Leistung eines jeden Tieres wird **der additiv-genetische Effekt des Tieres selbst** modelliert
- Genetische Verknüpfung aller Tiere erfolgt durch die **additiv-genetische Verwandtschaftsmatrix**
- Für **jedes Tier** wird ein **Zuchtwert** geschätzt
- → Mischmodellgleichungen enthalten für jedes Tier mit Leistungsinformation sowie für alle Verwandten eine Gleichung

Ein-Merkmal-Modelle

- **Ein-Merkmal**-Modell = **univariate** Zuchtwertschätzung
  - Für jedes Tier mit Leistungsinformationen wird nur ein Merkmal betrachtet
  - Nur für ein Merkmal werden Zuchtwerte geschätzt
  - In der Praxis/Routine-Zuchtwertschätzung selten der Fall

Wiederholbarkeitsmodell

- Kann als Erweiterung des Ein-Merkmals-Modell gesehen werden
- Merkmale werden im Leben eines Tieres **wiederholt** am **gleichen** Tier gemessen
- z.B. Fettgehalt der Milch in verschiedenen Laktationen bei Milchkühen, Eigewichte bei Legehennen, Reproduktion, ...

Wiederholbarkeitsmodell

- Voraussetzung: das wiederholt gemessene Merkmal muss **genetisch dasselbe Merkmal** sein.
- → die **genetische Korrelation** zwischen den Wiederholungen muss nahe **1,0** sein
- Sicherheit ist **höher** als im univariaten Modell
- Für Zuchtwertschätzung muss h2 und **Wiederholbarkeit** vorhanden sein
- Wiederholbarkeit misst den **Grad der Übereinstimmung** zwischen Einzelleistungen

Mehr-Merkmale-Modell

- Zuchtziele bestehen heute in der Praxis aus vielen Merkmalen
- Gesamtzuchtwert (GZW) bei Braunvieh in der Schweiz
- In der Praxis werden Zuchtwerte am häufigsten mit einem Mehr-Merkmale-Modell geschätzt

Merkmal	GZW BV %	
Milch kg	10	Milch 45
Eiweiss kg	27	
Eiweiss %	8	
Fundament	3	Exterieur 13
Euter	10	
Persistenz	4	Fitness 42
Nutzungsdauer	10	
Zellzahl	9	
Fruchtbarkeit	15	
Milchfluss	4	

Mehr-Merkmale-Modell

- Bestehen zwischen Merkmalen im Zuchtziel genetische Beziehungen, dann nützt ein Ein-Merkmal-Modell die vorhandene Information **nicht** aus
- Werden Zuchtwerte für mehrere Merkmale simultan in einem Modell geschätzt, spricht man von **multivariater** Zuchtwertschätzung
- Merkmale können
  - biologisch verschieden sein (z.B. Milchmenge, Milchfett, Milcheiweiss)
  - Wiederholte Messungen des gleichen Merkmals am gleichen Tier sein

Mehr-Merkmale-Modell

- Merkmale sind **wiederholte Messungen** des gleichen Merkmals am gleichen Tier
  - Wiederholungen sind genetisch nicht dasselbe Merkmal
  - z.B. Fruchtbarkeitsmerkmale in der Rinderzucht
  - Fruchtbarkeit ist bei Rindern deutlich unterschiedlich als bei Kühen in Laktation
  - Genetische Korrelation zwischen Fruchtbarkeit bei Rindern und Kühen liegt zwischen 0.5 und 0.7 → sind als genetisch unterschiedliche Merkmale zu betrachten
- In Mehr-Merkmale-Modellen werden **genetische Beziehungen** (Korrelationen, Kovarianzen) zwischen den Merkmalen benötigt

Mehr-Merkmale-Modell

- Sicherheit von Mehr-Merkmale-Modellen höher
- Der Zuwachs an Sicherheit hängt ab von der Differenz der genetischen und umweltbedingten (Residual) Korrelationen zwischen den Merkmalen
- **Alle** Merkmale multivariat in einem BLUP-Tiermodell zu schätzen wird in der Praxis nicht gemacht
- Merkmale werden oft in Blöcke zusammengefasst

Mehr-Merkmale-Modell

Modell für Merkmal 1 $\mathbf{y}_1 = \mathbf{X}_1\mathbf{b}_1 + \mathbf{Z}_1\mathbf{a}_1 + \mathbf{e}_1$

Modell für Merkmal 2 $\mathbf{y}_2 = \mathbf{X}_2\mathbf{b}_2 + \mathbf{Z}_2\mathbf{a}_2 + \mathbf{e}_2$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{bmatrix}$$

Mehr-Merkmal-Modell

Mischmodellgleichungen für 2 Merkmale multivariat geschätzt

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}}_1 \\ \hat{\mathbf{b}}_2 \\ \hat{\mathbf{a}}_1 \\ \hat{\mathbf{a}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1'\mathbf{R}^{11}\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_1'\mathbf{R}^{12}\mathbf{X}_2 & \mathbf{X}_1'\mathbf{R}^{11}\mathbf{Z}_1 & \mathbf{X}_1'\mathbf{R}^{12}\mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{X}_2'\mathbf{R}^{12}\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2'\mathbf{R}^{22}\mathbf{X}_2 & \mathbf{X}_2'\mathbf{R}^{21}\mathbf{Z}_1 & \mathbf{X}_2'\mathbf{R}^{22}\mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{Z}_1'\mathbf{R}^{11}\mathbf{X}_1 & \mathbf{Z}_1'\mathbf{R}^{12}\mathbf{X}_2 & \mathbf{Z}_1'\mathbf{R}^{11}\mathbf{Z}_1 + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}^{11} & \mathbf{Z}_1'\mathbf{R}^{12}\mathbf{Z}_2 + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}^{12} \\ \mathbf{Z}_2'\mathbf{R}^{21}\mathbf{X}_1 & \mathbf{Z}_2'\mathbf{R}^{22}\mathbf{X}_2 & \mathbf{Z}_2'\mathbf{R}^{21}\mathbf{Z}_1 + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}^{21} & \mathbf{Z}_2'\mathbf{R}^{22}\mathbf{Z}_2 + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}^{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1'\mathbf{R}^{11}\mathbf{y}_1 + \mathbf{X}_2'\mathbf{R}^{12}\mathbf{y}_2 \\ \mathbf{X}_2'\mathbf{R}^{21}\mathbf{y}_1 + \mathbf{X}_2'\mathbf{R}^{22}\mathbf{y}_2 \\ \mathbf{Z}_1'\mathbf{R}^{11}\mathbf{y}_1 + \mathbf{Z}_1'\mathbf{R}^{12}\mathbf{y}_2 \\ \mathbf{Z}_2'\mathbf{R}^{21}\mathbf{y}_1 + \mathbf{Z}_2'\mathbf{R}^{22}\mathbf{y}_2 \end{bmatrix}$$

BLUP Vatermodell

Beispiel: BLUP Vatermodell (Sire model) (Mrode, 2005, p53 ff)

Merkmal: Gewichtszuwachs bis zum Absetzen (Entwöhnung) von Mastkälbern
Kälber werden unter gleichen Managementbedingungen aufgezogen

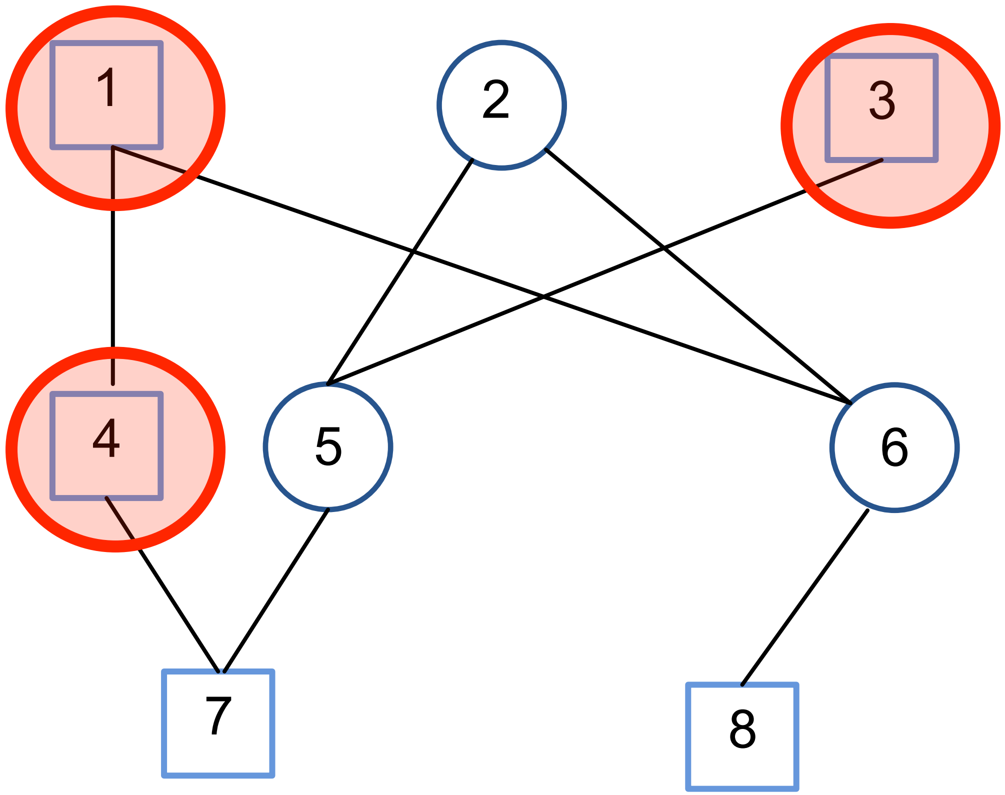
Kalb	Geschlecht	Vater	Mutter	Zuwachs (kg)
4	M	1	-	4.5
5	W	3	2	2.9
6	W	1	2	3.9
7	M	4	5	3.5
8	M	3	6	5.0

Beispiel: BLUP Vatermodell (Sire model) (Mrode, 2005, p53 ff)

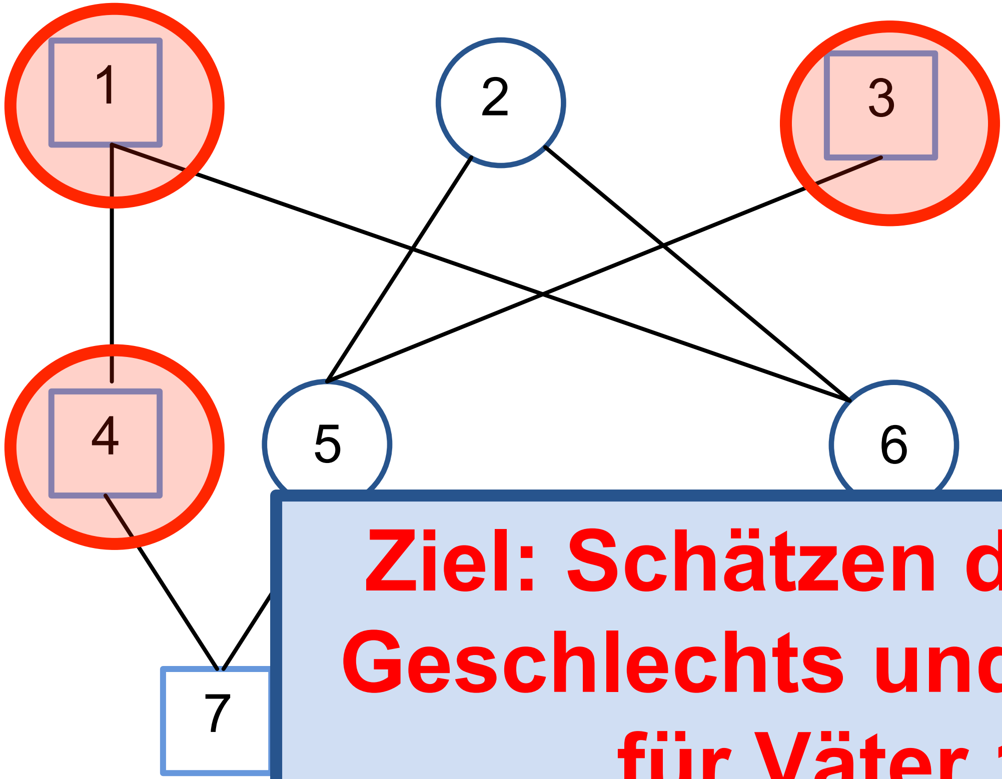
Merkmal: Gewichtszuwachs bis zum Absetzen (Entwöhnung) von Mastkälbern
Kälber werden unter gleichen Managementbedingungen aufgezogen

Kalb	Geschl.	Vater	Vater vom Vater	Mutter vom Vater	Zuwachs (kg)
4	M	1	-	-	4.5
5	W	3	-	-	2.9
6	W	1	-	-	3.9
7	M	4	1	-	3.5
8	M	3	-	-	5.0

Beispiel: BLUP Vatermodell (Sire model) (Mrode, 2005, p53 ff)



Beispiel: BLUP Vatermodell (Sire model) (Mrode, 2005, p53 ff)



Ziel: Schätzen des Effektes des Geschlechts und der Zuchtwerte für Väter 1, 3 und 4

BLUP Vatermodell

K.	G.	Vat.	Vat. v. Vat.	Mut. v. Vat.	Zuw. (kg)
4	M	1	-	-	4.5
5	W	3	-	-	2.9
6	W	1	-	-	3.9
7	M	4	1	-	3.5
8	M	3	-	-	5.0

$$y_{ij} = p_i + a_j + e_{ij}$$

i = Geschlecht

j = **Vater**

y_{ij} = Zuwachs des **Vaters** j mit Geschlecht i

p_i = fixer Effekt des Geschlechts i

a_j = zufälliger Effekt des **Vaters** j

e_{ij} = zufälliger Fehler

BLUP Vatermodell

K.	G.	Vat.	Vat. v. Vat.	Mut. v. Vat.	Zuw. (kg)
4	M	1	-	-	4.5
5	W	3	-	-	2.9
6	W	1	-	-	3.9
7	M	4	1	-	3.5
8	M	3	-	-	5.0

Modell nun in Matrixschreibweise

$$\mathbf{y} = \mathbf{Xb} + \mathbf{Zs} + \mathbf{e}$$

s ... Sire (Vater)

n = Anzahl Beobachtungen

p = Anzahl Stufen (Fix)

q = Anzahl Stufen (Zufällig)

$\mathbf{y}_{(n \times 1)}$ Anzahl Beobachtungen x 1

$\mathbf{b}_{(p \times 1)}$ Anzahl fixe Stufen x 1

$\mathbf{s}_{(q \times 1)}$ Anzahl zufällige Stufen x 1

$\mathbf{X}_{(n \times p)}$ Anzahl Beobachtungen x fixe Stufen

$\mathbf{Z}_{(n \times q)}$ Anzahl Beobachtungen x zuf. Stufen

X und Z sind Designmatrizen, welche die fixen und zufälligen Effekte den Beobachtungen y zuordnen

BLUP Vatermodell

K.	G.	Vat.	Vat. v. Vat.	Mut. v. Vat.	Zuw. (kg)
4	M	1	-	-	4.5
5	W	3	-	-	2.9
6	W	1	-	-	3.9
7	M	4	1	-	3.5
8	M	3	-	-	5.0

Modell nun in Matrixschreibweise

$$\mathbf{y} = \mathbf{Xb} + \mathbf{Zs}$$

s ... Sire (Vater)

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 4.5 \\ 2.9 \\ 3.9 \\ 3.5 \\ 5.0 \end{bmatrix}$$

Vektor mit phänotypischen Beobachtungen der Nachkommen der Väter

BLUP Vatermodell

K.	G.	Vat.	Vat. v. Vat.	Mut. v. Vat.	Zuw. (kg)
4	M	1	-	-	4.5
5	W	3	-	-	2.9
6	W	1	-	-	3.9
7	M	4	1	-	3.5
8	M	3	-	-	5.0

Modell nun in Matrixschreibweise

$$\mathbf{y} = \mathbf{Xb} + \mathbf{Zs}$$

s ... Sire (Vater)

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 4.5 \\ 2.9 \\ 3.9 \\ 3.5 \\ 5.0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \text{Faktorstufe 1} & \text{Faktorstufe 2} \end{array}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Designmatrix für fixen Effekt Geschlecht

BLUP Vatermodell

K.	G.	Vat.	Vat. v. Vat.	Mut. v. Vat.	Zuw. (kg)
4	M	1	-	-	4.5
5	W	3	-	-	2.9
6	W	1	-	-	3.9
7	M	4	1	-	3.5
8	M	3	-	-	5.0

Modell nun in Matrixschreibweise

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{b} + \mathbf{Z}\mathbf{s}$$

s ... Sire (Vater)

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 4.5 \\ 2.9 \\ 3.9 \\ 3.5 \\ 5.0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Väter

$$\mathbf{Z} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Klassen des zufälligen Effektes sind die Väter der Tiere mit Leistungen

BLUP Vatermodell

K.	G.	Vat.	Vat. v. Vat.	Mut. v. Vat.	Zuw. (kg)
4	M	1	-	-	4.5
5	W	3	-	-	2.9
6	W	1	-	-	3.9
7	M	4	1	-	3.5
8	M	3	-	-	5.0

Modell nun in Matrixschreibweise

$$\mathbf{y} = \mathbf{Xb} + \mathbf{Zs}$$

s ... Sire (Vater)

Mischmodellgleichung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda \mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}$$

BLUP Vatermodell

K.	G.	Vat.	Vat. v. Vat.	Mut. v. Vat.	Zuw. (kg)
4	M	1	-	-	4.5
5	W	3	-	-	2.9
6	W	1	-	-	3.9
7	M	4	1	-	3.5
8	M	3	-	-	5.0

$$\mathbf{y} = \mathbf{Xb} + \mathbf{Zs}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda \mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X'} = ? \qquad \mathbf{X'X} = ?$$

BLUP Vatermodell

K.	G.	Vat.	Vat. v. Vat.	Mut. v. Vat.	Zuw. (kg)
4	M	1	-	-	4.5
5	W	3	-	-	2.9
6	W	1	-	-	3.9
7	M	4	1	-	3.5
8	M	3	-	-	5.0

$$\mathbf{y} = \mathbf{Xb} + \mathbf{Zs}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda \mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Wie im BLUP **Tiermodell**

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X'X} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

BLUP Vatermodell

K.	G.	Vat.	Vat. v. Vat.	Mut. v. Vat.	Zuw. (kg)
4	M	1	-	-	4.5
5	W	3	-	-	2.9
6	W	1	-	-	3.9
7	M	4	1	-	3.5
8	M	3	-	-	5.0

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{b} + \mathbf{Z}\mathbf{s}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda\mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}$$

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X'Z} = ?$$

BLUP Vatermodell

K.	G.	Vat.	Vat. v. Vat.	Mut. v. Vat.	Zuw. (kg)
4	M	1	-	-	4.5
5	W	3	-	-	2.9
6	W	1	-	-	3.9
7	M	4	1	-	3.5
8	M	3	-	-	5.0

$$\mathbf{y} = \mathbf{Xb} + \mathbf{Zs}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda \mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}$$

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X'Z} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

BLUP Vatermodell

K.	G.	Vat.	Vat. v. Vat.	Mut. v. Vat.	Zuw. (kg)
4	M	1	-	-	4.5
5	W	3	-	-	2.9
6	W	1	-	-	3.9
7	M	4	1	-	3.5
8	M	3	-	-	5.0

$$\mathbf{y} = \mathbf{Xb} + \mathbf{Zs}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda \mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Z' = ?$$

$$Z'X = ?$$

BLUP Vatermodell

K.	G.	Vat.	Vat. v. Vat.	Mut. v. Vat.	Zuw. (kg)
4	M	1	-	-	4.5
5	W	3	-	-	2.9
6	W	1	-	-	3.9
7	M	4	1	-	3.5
8	M	3	-	-	5.0

$$\mathbf{y} = \mathbf{Xb} + \mathbf{Zs}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda \mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Z' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Z'X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

BLUP Vatermodell

K.	G.	Vat.	Vat. v. Vat.	Mut. v. Vat.	Zuw. (kg)
4	M	1	-	-	4.5
5	W	3	-	-	2.9
6	W	1	-	-	3.9
7	M	4	1	-	3.5
8	M	3	-	-	5.0

$$\mathbf{y} = \mathbf{Xb} + \mathbf{Zs}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda\mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}$$

$$Z' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z'Z} = ?$$

BLUP Vatermodell

K.	G.	Vat.	Vat. v. Vat.	Mut. v. Vat.	Zuw. (kg)
4	M	1	-	-	4.5
5	W	3	-	-	2.9
6	W	1	-	-	3.9
7	M	4	1	-	3.5
8	M	3	-	-	5.0

$$\mathbf{y} = \mathbf{Xb} + \mathbf{Zs}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda \mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}$$

$$Z' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Z'Z} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

BLUP Vatermodell

K.	G.	Vat.	Vat. v. Vat.	Mut. v. Vat.	Zuw. (kg)
4	M	1	-	-	4.5
5	W	3	-	-	2.9
6	W	1	-	-	3.9
7	M	4	1	-	3.5
8	M	3	-	-	5.0

$$\mathbf{y} = \mathbf{Xb} + \mathbf{Zs}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda\mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}$$

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Z' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 4.5 \\ 2.9 \\ 3.9 \\ 3.5 \\ 5.0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X'y} = ?$$

$$\mathbf{Z'y} = ?$$

BLUP Vatermodell

K.	G.	Vat.	Vat. v. Vat.	Mut. v. Vat.	Zuw. (kg)
4	M	1	-	-	4.5
5	W	3	-	-	2.9
6	W	1	-	-	3.9
7	M	4	1	-	3.5
8	M	3	-	-	5.0

$$\mathbf{y} = \mathbf{Xb} + \mathbf{Zs}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda\mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}$$

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Z' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 4.5 \\ 2.9 \\ 3.9 \\ 3.5 \\ 5.0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X'y} = \begin{bmatrix} 13 \\ 6.8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z'y} = \begin{bmatrix} 8.4 \\ 7.9 \\ 3.5 \end{bmatrix}$$

BLUP Vatermodell

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda\mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}_{1,\text{Männlich}} \\ \hat{b}_{2,\text{Weiblich}} \\ \hat{\mathbf{s}}_{\text{Vater1}} \\ \hat{\mathbf{s}}_{\text{Vater3}} \\ \hat{\mathbf{s}}_{\text{Vater4}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 \\ 6.8 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 8.4 \\ 7.9 \\ 3.5 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

BLUP Vatermodell

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda \mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.333 & 0 & -0.667 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ -0.667 & 0 & 1.333 \end{bmatrix}$$

BLUP Vatermodell

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda \mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_a^2 = 20$$

$$\sigma_e^2 = 40$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.333 & 0 & -0.667 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ -0.667 & 0 & 1.333 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{var(s)} = \mathbf{A}\sigma_s^2$$

$$\sigma_a^2 = 20$$

$$\sigma_s^2 = \frac{1}{4}\sigma_a^2 = 5$$

$$\sigma_{e*}^2 = \frac{3}{4}\sigma_a^2 + \sigma_e^2 = 15 + 40 = 55$$

$$\lambda = \frac{\sigma_{e*}^2}{\sigma_s^2} = \frac{55}{5} = 11$$

BLUP Vatermodell

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda\mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}$$

$$\lambda\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 14.663 & 0 & -7.337 \\ 0 & 11.0 & 0 \\ -7.337 & 0 & 14.663 \end{bmatrix}$$

BLUP Vatermodell

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda \mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z'Z} + \lambda \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 16.663 & 0 & -7.337 \\ 0 & 13.0 & 0 \\ -7.337 & 0 & 15.663 \end{bmatrix}$$

BLUP Vatermodell

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda\mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 16.663 & 0 & -7.337 \\ 0 & 13.0 & 0 \\ -7.337 & 0 & 15.663 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}_{1,\text{Männlich}} \\ \hat{b}_{2,\text{Weiblich}} \\ \hat{\mathbf{s}}_{\text{Vater1}} \\ \hat{\mathbf{s}}_{\text{Vater3}} \\ \hat{\mathbf{s}}_{\text{Vater4}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 \\ 6.8 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 8.4 \\ 7.9 \\ 3.5 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

BLUP Vatermodell

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'X} & \mathbf{X'Z} \\ \mathbf{Z'X} & \mathbf{Z'Z} + \lambda \mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{X'y} \\ \mathbf{Z'y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}}_1 \\ \hat{\mathbf{b}}_2 \\ \hat{\mathbf{s}}_1 \\ \hat{\mathbf{s}}_3 \\ \hat{\mathbf{s}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.000 & 0.000 & 1.000 & 1.000 & 1.000 \\ 0.000 & 2.000 & 1.000 & 1.000 & 0.000 \\ 1.000 & 1.000 & 16.663 & 0.000 & -7.334 \\ 1.000 & 1.000 & 0.000 & 13.000 & 0.000 \\ 1.000 & 0.000 & -7.334 & 0.000 & 15.663 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 13.0 \\ 6.8 \\ 8.4 \\ 7.9 \\ 3.5 \end{bmatrix}$$

BLUP Vatermodell – Lösung der MME

$$\begin{bmatrix} \hat{b}_{1,\text{Männlich}} \\ \hat{b}_{2,\text{Weiblich}} \\ \hat{s}_{\text{Vater1}} \\ \hat{s}_{\text{Vater3}} \\ \hat{s}_{\text{Vater4}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.336 \\ 3.382 \\ 0.022 \\ 0.014 \\ -0.043 \end{bmatrix}$$

BLUE Schätzer für die Faktorstufen des fixen Effektes Geschlecht

BLUP Schätzer für den zufälligen Vatereffekt = Zuchtwert der Väter

BLUP Vatermodell – Lösung der MME

$$\begin{bmatrix} \hat{b}_{1,\text{Männlich}} \\ \hat{b}_{2,\text{Weiblich}} \\ \hat{s}_{\text{Vater1}} \\ \hat{s}_{\text{Vater3}} \\ \hat{s}_{\text{Vater4}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.336 \\ 3.382 \\ 0.022 \\ 0.014 \\ -0.043 \end{bmatrix}$$

Männliche Kälber wachsen schneller als weibliche

Das Vatermodell gibt andere Lösungen für die Väter als das Tiermodell

BLUP Vatermodell – Lösung der MME

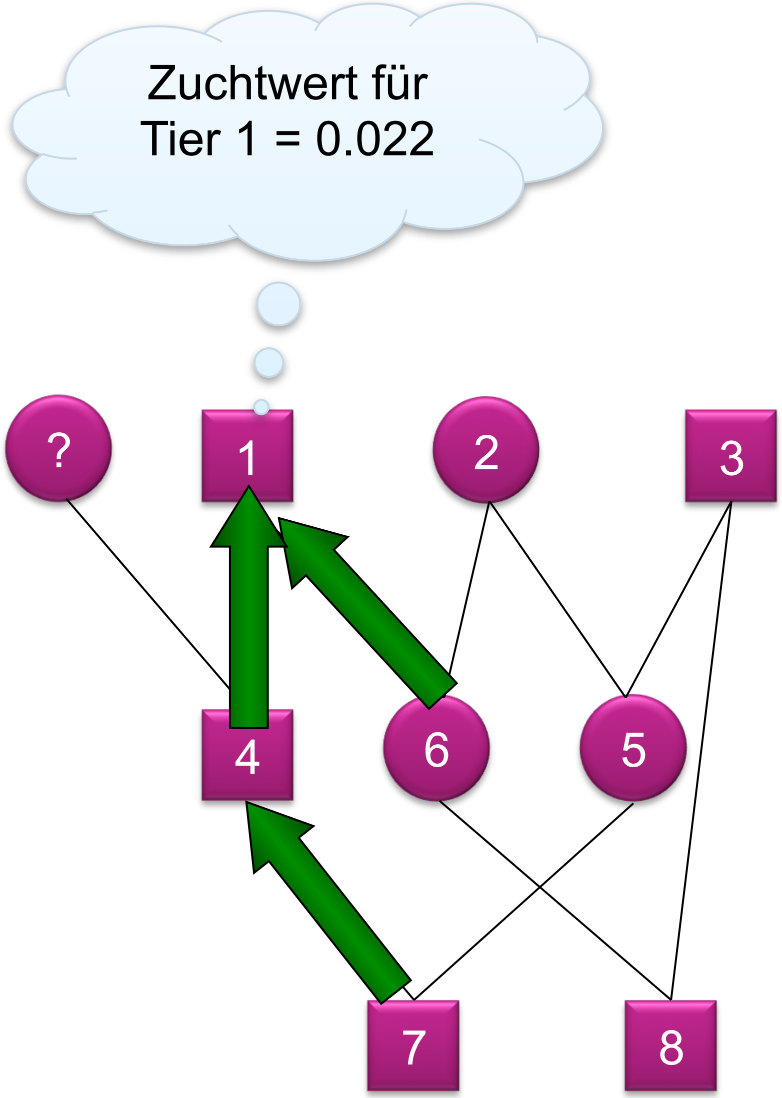
Vatermodell

$$\begin{bmatrix} \hat{b}_{1,\text{Männlich}} \\ \hat{b}_{2,\text{Weiblich}} \\ \hat{s}_{\text{Vater1}} \\ \hat{s}_{\text{Vater3}} \\ \hat{s}_{\text{Vater4}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.336 \\ 3.382 \\ 0.022 \\ 0.014 \\ -0.043 \end{bmatrix}$$

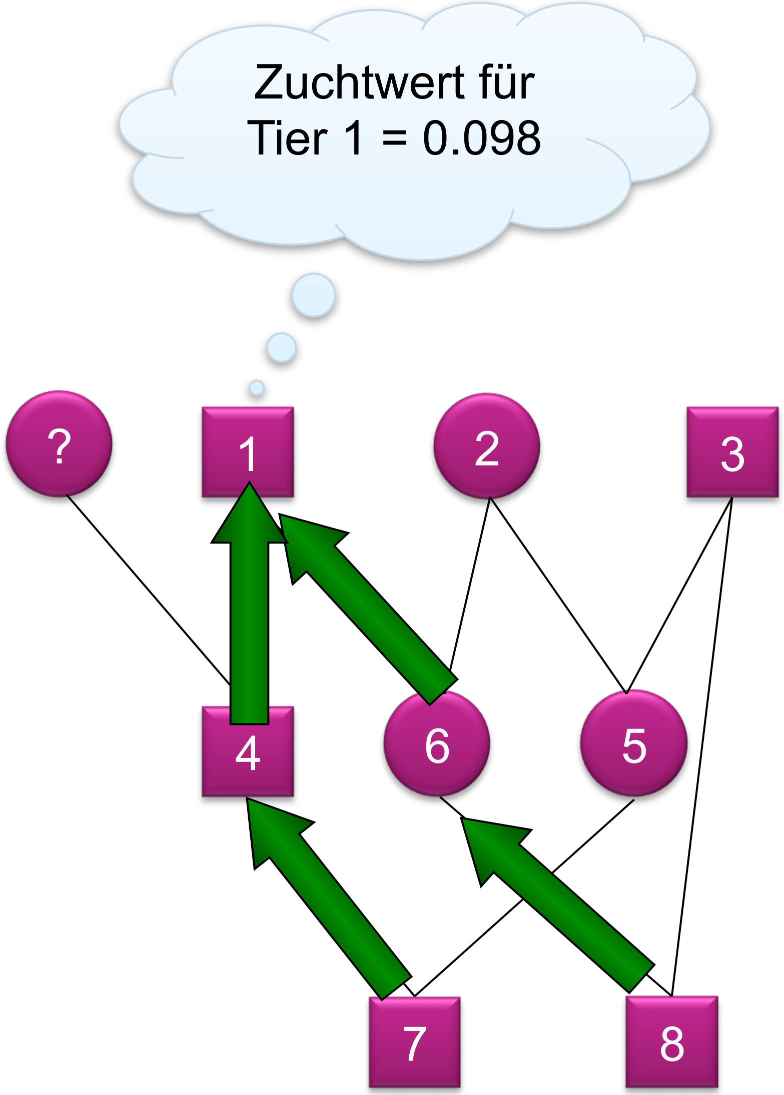
Tiermodell

$$\begin{bmatrix} \hat{b}_{1.\text{Männlich}} \\ \hat{b}_{2,\text{Weiblich}} \\ \hat{a}_{\text{Tier1}} \\ \hat{a}_{\text{Tier2}} \\ \hat{a}_{\text{Tier3}} \\ \hat{a}_{\text{Tier4}} \\ \hat{a}_{\text{Tier5}} \\ \hat{a}_{\text{Tier6}} \\ \hat{a}_{\text{Tier7}} \\ \hat{a}_{\text{Tier8}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.358 \\ 3.404 \\ 0.098 \\ -0.019 \\ -0.041 \\ -0.009 \\ -0.186 \\ 0.177 \\ -0.249 \\ 0.183 \end{bmatrix}$$

BLUP Vatermodell



BLUP Tiermodell



Fragenkatalog I

- Was heisst BLUP?
- Was sind die Eigenschaften von BLUP Zuchtwerten?
- Stellen Sie die Mischmodellgleichungen für gegebene Beispiele auf Vatermodell/Tiermodell
- Berechnen der notwendigen Matrizen der Mischmodellgleichungen Vatermodell/Tiermodell
- Nennen Sie verschiedene Modelle der BLUP-Zuchtwertschätzung
- Vergleichen Sie Tier- und Vatermodell
- Was ist ein Wiederholbarkeitsmodell?

Fragenkatalog II

- Was ist ein Mehr-Merkmale-Modell?
- Wie sind Genauigkeit und Sicherheit der Zuchtwerte definiert?
- Was ist die Prediction Error Variance?

ÜBUNGSAUFGABE 2