Züchtungslehre - Lösung 6

Peter von Rohr

November 12, 2015

Aufgabe 1 (5)

Für Aufgabe 1 wurde folgendes Pedigree verwendet

```
> library(pedigreemm)
> nAnzTiere <- 6
> pedA1 <- pedigree(sire = c(NA,NA,1, 1,4,4),
+                  dam  = c(NA,NA,2,NA,2,2), label= 1:nAnzTiere)
> print(pedA1)

  sire  dam
1 <NA> <NA>
2 <NA> <NA>
3    1    2
4    1 <NA>
5    4    2
6    4    2
```

Die α_i-Werte für die Tiere im Pedigree sind in folgender Tabelle aufgelistet.

TierId	Wert in Matrix $\mathbf{D}^{-1}$ (α_i)
1	1.00
2	1.00
3	2.00
4	1.33
5	2.00
6	2.00

Das direkte Aufstellen der inversen Verwandtschaftsmatrix $\mathbf{A}^{-1}$ basiert auf folgenden Regeln.

Regeln für $\mathbf{A}^{-1}$

- Initialisierung aller Elemente in $\mathbf{A}^{-1}$ mit dem Wert 0

- Hat Tier i bekannte Eltern m und v dann folgende Veränderungen in $\mathbf{A}^{-1}$ vornehmen
  - α_i zum Element (i,i) (Zeile von Tier i und Kolonne von Tier i) hinzuzählen
  - $\frac{\alpha_i}{2}$ von den Elementen (m,i), (i,m), (v,i) und (i,v) abziehen
  - $\frac{\alpha_i}{4}$ zu den Elementen (m,m), (m,v), (v,m) und (v,v) hinzuzählen
- Nur Elternteil m von Tier i ist bekannt, dann folgende Veränderungen in $\mathbf{A}^{-1}$ vornehmen
  - α_i zum Element (i,i) hinzuzählen
  - $\frac{\alpha_i}{2}$ von den Elementen (m,i) und (i,m) abziehen
  - $\frac{\alpha_i}{4}$ zum Element (m,m) hinzuzählen
- Tier i hat keine bekannten Eltern, dann α_i zum Element (i,i) hinzuzählen

Schritte 1 bis 3

Schritte 1 bis 3 zur Berechnung der Anteile von $\mathbf{A}^{-1}$ für Tiere 1 bis 3 wurden in der Aufgabe vorgegeben. Nach diesen drei Schritten sieht die Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ wie folgt aus

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.50 & 0.50 & -1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.50 & 1.50 & -1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ -1.00 & -1.00 & 2.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

Schritt 4

Tier 4 hat nur einen bekannten Elternteil. Aus der Tabelle der α_i Werte kann $\alpha_4 = 1.33$ bestimmt werden. Somit werden folgende Beträge zu $\mathbf{A}^{-1}$ hinzugefügt.

- $\alpha_4 = 1.33$ zum Element $(4,4)$ hinzuzählen
- $\frac{\alpha_4}{2} = 0.67$ von den Elementen $(1,4)$ und $(4,1)$ abziehen
- $\frac{\alpha_4}{4} = 0.33$ zum Element $(1,1)$ hinzuzählen

Somit sieht die Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ nach Schritt 4 wie folgt aus.

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.5 + 0.33 & 0.5 & -1 & 0 - 0.67 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1.5 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 - 0.67 & 0 & 0 & 0 + 1.33 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Schritte 5 und 6

Tiere 5 und 6 haben bekannte Eltern 4 und 2, somit werden folgende Beiträge zu $\mathbf{A}^{-1}$ hinzugefügt.
Für Tier 5

- $\alpha_5 = 2$ zum Element $(5,5)$ hinzuzählen
- $\frac{\alpha_5}{2} = 1$ von den Elementen $(4,5)$, $(5,4)$, $(2,5)$ und $(5,2)$ abziehen
- $\frac{\alpha_5}{4} = 0.5$ zu den Elementen $(4,4)$, $(2,2)$, $(4,2)$ und $(2,4)$ hinzuzählen

Somit sieht die Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ nach Schritt 5 wie folgt aus.

$$\mathbf{A}^{-1} = \left[\begin{array}{llllll} 1.5 + 0.33 & 0.5 & -1 & 0 - 0.67 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1.5 + 0.5 & -1 & 0 + 0.5 & 0 - 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 - 0.67 & 0 + 0.5 & 0 & 0 + 1.33 + 0.5 & 0 - 1 & 0 \\ 0 & 0 - 1 & 0 & 0 - 1 & 0 + 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Für Tier 6

- $\alpha_6 = 2$ zum Element $(6,6)$ hinzuzählen
- $\frac{\alpha_6}{2} = 1$ von den Elementen $(4,6)$, $(6,4)$, $(2,6)$ und $(6,2)$ abziehen
- $\frac{\alpha_6}{4} = 0.5$ zu den Elementen $(4,4)$, $(2,2)$, $(4,2)$ und $(2,4)$ hinzuzählen

Somit sieht die Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ nach Schritt 6 wie folgt aus.

$$\mathbf{A}^{-1} = \left[\begin{array}{llllll} 1.5 + 0.33 & 0.5 & -1 & 0 - 0.67 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1.5 + 0.5 + 0.5 & -1 & 0 + 0.5 + 0.5 & 0 - 1 & 0 - 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 - 0.67 & 0 + 0.5 + 0.5 & 0 & 0 + 1.33 + 0.5 + 0.5 & 0 - 1 & 0 - 1 \\ 0 & 0 - 1 & 0 & 0 - 1 & 0 + 2 & 0 \\ 0 & 0 - 1 & 0 & 0 - 1 & 0 & 0 + 2 \end{array}\right]$$

Nach Vereinfachung der Summen haben wir folgend Matrix als Resultat

$$\mathbf{A}^{-1} = \left[\begin{array}{rrrrrr} 1.83 & 0.50 & -1.00 & -0.67 & 0.00 & 0.00 \\ 0.50 & 2.50 & -1.00 & 1.00 & -1.00 & -1.00 \\ -1.00 & -1.00 & 2.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ -0.67 & 1.00 & 0.00 & 2.33 & -1.00 & -1.00 \\ 0.00 & -1.00 & 0.00 & -1.00 & 2.00 & 0.00 \\ 0.00 & -1.00 & 0.00 & -1.00 & 0.00 & 2.00 \end{array}\right]$$

Kontrolle

Als Kontrolle rechnen wir die Inverse Verwandtschaftsmatrix mit der Funktion `getAInv()`

```
> (matCheckAInv <- round(as.matrix(getAInv(pedA1)), digits = 2))
```

```
      1    2  3     4  5  6
1  1.83  0.5 -1 -0.67  0  0
2  0.50  2.5 -1  1.00 -1 -1
3 -1.00 -1.0  2  0.00  0  0
4 -0.67  1.0  0  2.33 -1 -1
5  0.00 -1.0  0 -1.00  2  0
6  0.00 -1.0  0 -1.00  0  2
```

```
> max(mParsedEvaledAinv-matCheckAInv)
```

```
[1] 0
```

Aufgabe 2 (7)

Für Aufgabe 2 arbeiten wir mit einem im Vergleich zu Aufgabe 1 leicht modifizierten Pedigree.

```
> library(pedigreemm)
> nAnzTiere <- 6
> pedA2 <- pedigree(sire = c(NA,NA,1, 1,4,5),
+                   dam  = c(NA,NA,2,NA,3,2), label= 1:nAnzTiere)
> print(pedA2)
```

```
  sire  dam
1 <NA> <NA>
2 <NA> <NA>
3    1    2
4    1 <NA>
5    4    3
6    5    2
```

In der Aufgabenstellung wurden die α_i Werte für die ersten drei Tiere bereits vorgegeben.

TierId	Wert in Matrix $\mathbf{D}^{-1}$ (α_i)
1	1
2	1
3	2
4	
5	
6	

Berechnung der α_i

Die α_i Werte entsprechen den Diagonalelementen der Matrix $\mathbf{D}^{-1}$ aus der LDL-Zerlegung der inversen Verwandtschaftsmatrix $\mathbf{A}^{-1}$. Da die Matrix $\mathbf{D}^{-1}$ und somit auch die Matrix $\mathbf{D}$ beides Diagonalmatrizen sind, lassen sich die α_i Werte einfach aus den Diagonalelementen d_{ii} der Matrix $\mathbf{D}$ berechnen. Aufgrund der Eigenschaften einer Diagonalmatrix gilt, dass

$$\alpha_i = \frac{1}{d_{ii}} \tag{1}$$

Aus der LDL-Zerlegung und der Cholesky-Zerlegung der Verwandtschaftsmatrix $\mathbf{A}$ können wir die d_{ii} Werte berechnen

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} * \mathbf{D} * \mathbf{L}^T = \mathbf{U} * \mathbf{U}^T \tag{2}$$

Aus den zwei Zerlegungen von $\mathbf{A}$ folgt, dass

$$\mathbf{U} = \mathbf{L} * \mathbf{S} \tag{3}$$

wobei $\mathbf{S}$ eine Diagonalmatrix ist deren Elemente $s_{ii} = \sqrt{d_{ii}}$ entsprechen. Da die Matrix $\mathbf{L}$ eine untere Dreiecksmatrix mit Diagonalelementen $l_{ii} = 1$ ist, entsprechen die Diagonalelemente u_{ii} der Matrix $\mathbf{U}$ den Diagonalelementen s_{ii} der Matrix $\mathbf{S}$. Es gilt also

$$u_{ii} = s_{ii} = \sqrt{d_{ii}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_i}} \tag{4}$$

Diese Beziehung in Gleichung (4) zeigt, dass wir α_i aus den u_{ii} berechnen können, wobei gilt, dass aufgrund von (4) $\alpha_i = \frac{1}{u_{ii}^2}$ ist. Sobald wir also für jedes Tier i das entsprechende Diagonalelement u_{ii} der Matrix $\mathbf{U}$ bestimmen können, wissen wir auch das zugehörige α_i.

In der Vorlesung hatten wir gesehen, dass die Diagonalelemente von $\mathbf{D}$ berechnet werden als

$$d_{ii} = 1 - 0.25(a_{ss} + a_{dd}) \tag{5}$$

wobei s und d die Eltern von i sind und a_{ss} und a_{dd} die den Eltern entsprechenden Diagonalelemente aus der Verwandtschaftsmatrix sind.
Setzen wir Gleichung (5) in Gleichung (4) ein, dann folgt

$$u_{ii} = s_{ii} = \sqrt{d_{ii}} = \sqrt{1 - 0.25(a_{ss} + a_{dd})} \tag{6}$$

Aufgrund der Cholesky-Zerlegung von $\mathbf{A} = \mathbf{U} * \mathbf{U}^T$ können die Diagonalelemente a_{ii} von $\mathbf{A}$ berechnet werden als

$$a_{ii} = \sum_{m=1}^{i} u_{im}^2 \tag{7}$$

Setzen wir die Beziehung aus Gleichung (7) in Gleichung (6) dann erhalten wir eine rekursive Formel für u_{ii}

$$u_{ii} = \sqrt{1 - 0.25(a_{ss} + a_{dd})} = \sqrt{1 - 0.25(\sum_{m=1}^{s} u_{sm}^2 + \sum_{m=1}^{d} u_{dm}^2)} \tag{8}$$

Die Nebendiagonalelemente u_{ij}, wobei $i \neq j$ der Matrix $\mathbf{U}$ werden berechnet als

$$u_{ij} = 0.5(u_{sj} + u_{dj}) \tag{9}$$

wobei, s und d die Eltern von Tier i sind.

Schritt 4

Tier 4 hat Tier 1 als Vater und keine bekannte Mutter. Mit der rekursiven Formel aus Gleichung 8 berechnen wir u_{44} als

$$u_{44} = \sqrt{1 - 0.25(\sum_{m=1}^{1} u_{sm}^2)} = \sqrt{1 - 0.25 * u_{11}^2} = \sqrt{0.75} \tag{10}$$

und

$$\alpha_4 = \frac{1}{u_{44}^2} = \frac{1}{0.75} = \frac{4}{3} \approx 1.33 \tag{11}$$

Schritt 5

Tier 5 hat bekannte Eltern 4 und 3. Die Formel für $u55$ lautet somit

$$\begin{aligned} u_{55} &= \sqrt{1 - 0.25(\sum_{m=1}^{4} u_{sm}^2 + \sum_{m=1}^{3} u_{dm}^2)} \\ &= \sqrt{1 - 0.25(u_{41}^2 + u_{42}^2 + u_{43}^2 + u_{44}^2 + u_{31}^2 + u_{32}^2 + u_{33}^2)} \end{aligned} \tag{12}$$

Als Vorbereitung müssen wir zuerst die Off-Diagonalelemente in Gleichung (13) berechnen.

$$\begin{aligned} u_{41} &= 0.5 * u_{11} = 0.5 \\ u_{42} &= 0.5 * u_{12} = 0 \\ u_{43} &= 0.5 * u_{13} = 0 \\ u_{44} &= \sqrt{0.75} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
u_{31} &= 0.5*(u_{11}+u_{21}) = 0.5 \\
u_{32} &= 0.5*(u_{12}+u_{22}) = 0.5 \\
u_{33} &= \sqrt{0.5}
\end{aligned}
$$

Einsetzen der Werte führt zu

$$
u_{55} = \sqrt{1-0.25(0.25+0.75+0.25+0.25+0.5)} = \sqrt{0.5} \tag{13}
$$

$$
\alpha_5 = \frac{1}{u_{55}^2} = \frac{1}{0.5} = 2 \tag{14}
$$

Schritt 6

Tier 6 hat bekannte Eltern 5 und 2. Der Wert u_{66} kann somit berechnet werden als

$$
\begin{aligned}
u_{66} &= \sqrt{1-0.25(\sum_{m=1}^{5} u_{sm}^2 + \sum_{m=1}^{2} u_{dm}^2)} \qquad (15) \\
&= \sqrt{1-0.25(u_{51}^2+u_{52}^2+u_{53}^2+u_{54}^2+u_{55}^2+u_{21}^2+u_{22}^2)}
\end{aligned}
$$

Die in Gleichung (16) verwendeten Offdiagonalelemente entsprechen

$$
\begin{aligned}
u_{51} &= 0.5*(u_{41}+u_{31}) = 0.5*(u_{41}+0.5*(u_{11}+u_{21})) = 0.5*(0.5+0.5*(1+0)) = 0.5 \\
u_{52} &= 0.5*(u_{42}+u_{32}) = 0.5*(u_{42}+0.5*(u_{12}+u_{22})) = 0.5*(0+0.5*(0+1)) = 0.25 \\
u_{53} &= 0.5*(u_{43}+u_{33}) = 0.5*(0+\sqrt{0.5}) = \sqrt{0.125} \\
u_{54} &= 0.5*(u_{44}+u_{34}) = 0.5*(\sqrt{0.75}+0) = \sqrt{3/16} \\
u_{55} &= \sqrt{0.5}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_{21} &= 0 \\
u_{22} &= 1
\end{aligned}
$$

Durch Einsetzen der Offdiagonalelemente erhalten wir

$$
u_{66} = \sqrt{1-0.25(1/4+1/16+1/8+3/16+1/2+1)} = \sqrt{15/32}
$$

und

$$\alpha_6 = \frac{1}{u_{66}^2} = \frac{32}{15} \approx 2.133 \tag{16}$$

Zusammengefasst in der vorgegebenen Tabelle sehen die α_i Werte wie folgt aus

TierId	Wert in Matrix $\mathbf{D}^{-1}$ (α_i)
1	1
2	1
3	2
4	4/3
5	2
6	32/15

Als Kontrolle können die α_i Werte auch mit der Funktion `Dmat()` berechnet werden.

```
> 1/Dmat(pedA2)
```

```
       1        2        3        4        5        6
1.000000 1.000000 2.000000 1.333333 2.000000 2.133333
```

Zusatzaufgabe

Als Zusatzaufgabe sollen wir die inversen Verwandtschaftsmatrix $\mathbf{A}^{-1}$ mit den soeben berechneten α_i Werten aufstellen. Das Vorgehen ist gleich, wie unter Aufgabe 1 gezeigt, nur die α_i Werte sind anders. Im folgenden werden die Beiträge zur Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ für jedes Tier aufgeführt

Beitrag aufgrund von Tier 1

$$\mathbf{A}^{-1} = \left[\begin{array}{llllll} 0+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Beitrag aufgrund von Tier 2

$$\mathbf{A}^{-1} = \left[\begin{array}{llllll} 0+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0+1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Beiträge aufgrund von Tier 3

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0+1+0.5 & 0+0.5 & 0-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0+0.5 & 0+1+0.5 & 0-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0-1 & 0-1 & 0+2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Beiträge aufgrund von Tier 4

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0+1+0.5+0.33 & 0+0.5 & 0-1 & 0-0.67 & 0 & 0 \\ 0+0.5 & 0+1+0.5 & 0-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0-1 & 0-1 & 0+2 & 0 & 0 & 0 \\ 0-0.67 & 0 & 0 & 0+1.33 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Beiträge aufgrund von Tier 5

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0+1+0.5+0.33 & 0+0.5 & 0-1 & 0-0.67 & 0 & 0 \\ 0+0.5 & 0+1+0.5 & 0-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0-1 & 0-1 & 0+2+0.5 & 0+0.5 & 0-1 & 0 \\ 0-0.67 & 0 & 0+0.5 & 0+1.33+0.5 & 0-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0-1 & 0-1 & 0+2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Beiträge aufgrund von Tier 6

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0+1+0.5+0.33 & 0+0.5 & 0-1 & 0-0.67 & 0 & 0 \\ 0+0.5 & 0+1+0.5+0.53 & 0-1 & 0 & 0+0.53 & 0-1.07 \\ 0-1 & 0-1 & 0+2+0.5 & 0+0.5 & 0-1 & 0 \\ 0-0.67 & 0 & 0+0.5 & 0+1.33+0.5 & 0-1 & 0 \\ 0 & 0+0.53 & 0-1 & 0-1 & 0+2+0.53 & 0-1.07 \\ 0 & 0-1.07 & 0 & 0 & 0-1.07 & 0+2.13 \end{bmatrix}$$

Nach dem Auflösen aller Summen resultiert folgende Matrix

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.83 & 0.50 & -1.00 & -0.67 & 0.00 & 0.00 \\ 0.50 & 2.03 & -1.00 & 0.00 & 0.53 & -1.07 \\ -1.00 & -1.00 & 2.50 & 0.50 & -1.00 & 0.00 \\ -0.67 & 0.00 & 0.50 & 1.83 & -1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.53 & -1.00 & -1.00 & 2.53 & -1.07 \\ 0.00 & -1.07 & 0.00 & 0.00 & -1.07 & 2.13 \end{bmatrix}$$

Zur Kontrolle vergleichen wir unser Resultat mit dem Resultat der Funktion `getAInv()`

```
> (matRoundAInvA2 <- round(as.matrix(getAInv(pedA2)), digits = 2))
```

```
      1     2    3     4     5     6
1  1.83  0.50 -1.0 -0.67  0.00  0.00
2  0.50  2.03 -1.0  0.00  0.53 -1.07
3 -1.00 -1.00  2.5  0.50 -1.00  0.00
4 -0.67  0.00  0.5  1.83 -1.00  0.00
5  0.00  0.53 -1.0 -1.00  2.53 -1.07
6  0.00 -1.07  0.0  0.00 -1.07  2.13
```

```
> max(matRoundAInvA2-mParsedEvaledAinvA2)
```

```
[1] 0
```