Bayes'scher Ansatz

Peter von Rohr

27 März 2017

Frequentisten und Bayesianer

Unterschiede zwischen Frequentisten und Bayesianern bestehen hauptsächlich in

- deren Verständnis von Wahrscheinlichkeiten
- deren Unterteilung von Modell- und Datenkomponenten
- deren Techniken zur Schätzung von Parametern

Bekannte und Unbekannte Grössen

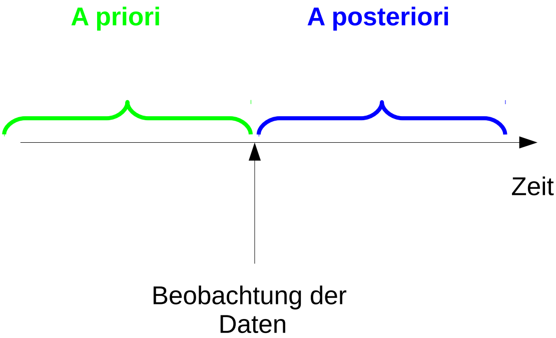
Angenommen: einfaches lineares Regressionsmodell

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \epsilon_i \tag{1}$$

Was	bekannt	unbekannt
y_i	X	
x_{i1}	X	
β_0		X
β_1		X
σ^2		X

Schätzung Unbekannter Grössen

- Parameterschätzung
- a posteriori Verteilung der unbekannten Grössen gegeben die bekannten Grössen



A Posteriori Verteilung

- Für unser Regressionsmodell
  - Annahme: σ^2 sei bekannt
  - a posteriori Verteilung für β: $f(\beta|y, \sigma^2)$
- Berechnung durch **Satz von Bayes**, dieser basiert auf der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit

$$
\begin{aligned}
f(\beta|y,\sigma^2) &= \frac{f(\beta, y, \sigma^2)}{f(y, \sigma^2)} \\
&= \frac{f(y|\beta,\sigma^2) f(\beta) f(\sigma^2)}{f(y,\sigma^2)} \\
&\propto f(y|\beta,\sigma^2) f(\beta) f(\sigma^2) \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Komponenten der A Posteriori Verteilung

- $f(y|\beta, \sigma^2)$: Likelihood
- $f(\beta)$: a priori Verteilung von β, oft als konstant angenommen, d.h. uninformative a priori Verteilung
- $f(\sigma^2)$: a priori Verteilung von σ^2, oft als konstant angenommen
- $f(y, \sigma^2)$: Normalisierungskonstante

$\rightarrow$ uninformative a priori Verteilungen führen

$$f(\beta|y, \sigma^2) \propto f(y|\beta, \sigma^2)$$

$\rightarrow$ Annahme, dass y normalverteilt:

$$f(y|\beta, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \; exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(y - X\beta)^T (y - X\beta)}{\sigma^2} \right\}$$

Problem

- A Posteriori Verteilung häufig nicht explizit als Verteilung darstellbar
- Lösung durch
  1. Julian Besag 1974: A Posteriori Verteilung ist bestimmt durch vollbedingte Verteilungen
  2. Gute Pseudozufallszahlen-Generatoren in Software
- A Posteriori Verteilung für Regression: $f(\beta|y,\sigma^2)$
- Vollbedingte Verteilungen für Regression:
  - $f(\beta_0|\beta_1,y,\sigma^2)$
  - $f(\beta_1|\beta_0,y,\sigma^2)$

wobei β der Vektor bestehen aus $\beta^T = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 \end{bmatrix}$

Ablauf einer Analyse: Vorbereitung

- Schritt 1: Festlegung der a priori Verteilungen
- Schritt 2: Bestimmung der Likelihood aufgrund von Daten und Modell
- Schritt 3: Berechnung der a posteriori Verteilung
- Schritt 4: Bestimmung der vollbedingten Verteilungen

Ablauf einer Analyse: Umsetzung

Beispiel der Regression

- Schritt 5: Initialisierung aller unbekannten Grössen (β_0, β_1) auf einen Startwert
- Schritt 6: Bestimme neuen Wert für β_0 durch Ziehen einer Zufallszahl aus $f(\beta_0|\beta_1, \mathbf{y})$
- Schritt 7: Bestimme neuen Wert für β_1 durch Ziehen einer Zufallszahl aus $f(\beta_1|\beta_0, \mathbf{y})$
- Schritt 8: Loop viele Wiederholungen über Schritte 6-7 und speichere alle gezogenen Zahlen
- Schritt 9: Parameterschätzungen als Mittelwerte der gespeicherten Zufallszahlen

R-Programm

```
beta = c(0, 0); meanBeta = c(0, 0)
niter = 10000 # number of samples
for (iter in 1:niter) {# loop for Gibbs sampler
  # sampling intercept
  w = y - X[, 2] * beta[2]; x = X[, 1]
  xpxi = 1/(t(x) %*% x); betaHat = t(x) %*% w * xpxi
  # using residual var = 1
  beta[1] = rnorm(1, betaHat, sqrt(xpxi))
  # sampling slope
  w = y - X[, 1] * beta[1]; x = X[, 2]
  xpxi = 1/(t(x) %*% x)
  betaHat = t(x) %*% w * xpxi
  # using residual var = 1
  beta[2] = rnorm(1, betaHat, sqrt(xpxi))
  meanBeta = meanBeta + beta
}
```

Fragen und Dank

- Fragen?
- Vielen Dank!!