BLUP-Zuchtwertschätzung

Peter von Rohr

23.04.2018

Lineare Funktion als Selektionsindex

- Index (I)

$$I = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_n x_n = b^T x$$

- Statistisch gesehen: I entspricht multipler linearer Regression
- unbekannte Regressionskoeffizienten b_i sind abhängig von
  - Erblichkeit des Merkmals
  - Art der Informationsquelle
  - Verwandtschaft zwischen Proband und Informationsquelle

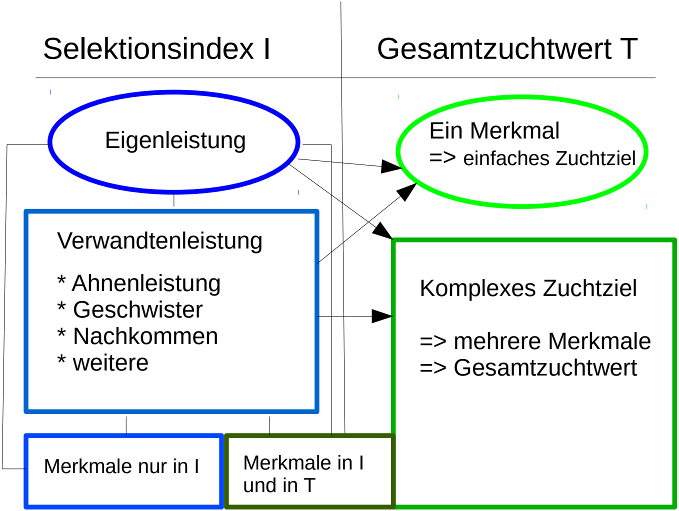
Terminologie

- **Selektionsindex** (I): Schätzung des Zuchtwertes für ein Merkmal aufgrund von verschiedenen Informationen
- Heute: häufige Verwendung zur Schätzung des Gesamtzuchtwerts
- **Gesamtzuchtwert** (T):
  - praktische Tierzucht verlangt mehrere Merkmale gleichzeitig zu verbessern
  - komplexe Zuchtziele enthält mehrere Merkmale
  - Kombination von Merkmalen über Gesamtzuchtwert

$$T = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n$$

wobei a_i: wirtschaftliche Gewichte - Änderung des Grenznutzens bei Änderung des Merkmals

Kombinationsmöglichkeiten



Indexkonstruktion

- Schätzung der Gewichtungsfaktoren b_i
- Folgende Parameter müssen bekannt sein
  - h^2 und sd_p der Merkmale in I und in T
  - r_P der Indexmerkmale
  - r_G zwischen Zuchtziel und Index
  - r_G zwischen Zuchtzielmerkmalen
  - wirtschaftliche Gewichte der Zuchtzielmerkmale
- Indexgewichte b_i sollen so bestimmt werden, dass
  - r_{TI} maximal wird oder
  - mittlerer quadrierter Fehler $E\left[(T-I)^2\right]$ minimal

Herleitung für einfaches Beispiel

- Zuchtziel enthält nur ein Merkmal $\rightarrow$ $T = u$ und $a = 1$
- Index besteht aus Eigenleisung, also ist $I = bx$
- Mittlerer quadrierter Fehler (MSE)

$$
\begin{aligned}
MSE &= E\left[(T - I)^2\right] \\
&= E\left[(u - bx)^2\right] \\
&= E\left[u^2 - 2ubx + b^2u^2\right] \\
&= E\left[u^2\right] - 2bE\left[ux\right] + b^2E\left[u^2\right] \\
&= \sigma_u^2 - 2b\sigma_{ux} + b^2\sigma_x^2 \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Minimierung von MSE

- Ableitung von *MSE* nach *b*
- Nullsetzen der Ableitung und nach *b* auflösen
- Resultat enspricht dem geschätzten Gewichtungsfaktor

$$\frac{\partial MSE}{\partial b} = -2\sigma_{ux} + 2b\sigma_x^2 = 0 \qquad (2)$$

- Somit gilt

$$\begin{aligned} b\sigma_x^2 &= \sigma_{ux} \\ b &= \frac{\sigma_{ux}}{\sigma_x^2} \\ &= \frac{\sigma_u^2}{\sigma_x^2} = h^2 \end{aligned} \qquad (3)$$

Verallgemeinerung

- Mehrere Merkmale in I und mehrere Merkmale in T
- Notation

σ_{pxpy}	phänotypische Kovarianz zwischen Index-Merkmalen x und y
σ_{pxgy}	genetische Kovarianz zwischen Index-Merkmal x und Zuchtziel-Merkmal y

- Gleichungssystem

$$
\begin{array}{rcl}
\sigma_{p1p1}b_1 + \ldots + \sigma_{p1pn}b_n & = & \sigma_{p1g1}a_1 + \ldots \sigma_{p1gm}a_m \\
\ldots & = & \ldots \\
\sigma_{pnp1}b_1 + \ldots + \sigma_{pnpn}b_n & = & \sigma_{png1}a_1 + \ldots \sigma_{pngm}a_m
\end{array}
$$

Matrix-Vektor-Schreibweise

- Matrix P mit $P_{ij} = \sigma_{pipj}$
- Matrix G mit $G_{ij} = \sigma_{pigj}$
- Indexgleichung oder Normalgleichung

$$Pb = Ga$$

* Beidseitige Links-Multiplikation mit P^{-1}

$$\begin{aligned} Pb &= Ga \\ P^{-1}Pb &= P^{-1}Ga \\ b &= P^{-1}Ga \end{aligned}$$

Genauigkeit

- Mass für die Genauigkeit: r_{TI}
- Bestimmtheitsmass (B) ist $B = r_{TI}^2$
- Berechnung

$$r_{TI} = \frac{\sigma_{TI}}{\sigma_T \sigma_I}$$

- Eigenleistung und ein Indexmerkmal

$$\sigma_T^2 = \sigma_u^2,\ \sigma_I^2 = b^2 \sigma_x^2 \text{ und } \sigma_{TI} = b\sigma_u^2$$

- Somit ist

$$r_{TI} = \frac{b\sigma_u^2}{\sigma_u b \sigma_x} = h$$

Nachkommenleistungen

- Schätzung der Zuchtwerte der Eltern (hier Väter) aufgrund der mittleren Nachkommenleistungen
- Annahme für einen bestimmten Elternteil sind Nachkommen Halbgeschwister
- Relativierung der Leistungen wird hier über mittlere Betriebseffekte gemacht
- Gewichtungsfaktor aufgrund

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1 + (n-1)t}{n}\ \sigma_x^2$$