Züchtungslehre - Einführung

Peter von Rohr

23 September 2016

Inhalt der heutigen Vorlesung

- Einführung in die Vorlesung
- Lineare Algebra
- Einführung in R

Who Is Who

- Studiengang
- Motivation für diese Vorlesung
- Erfahrungen in Tierzucht / R / Statistik / ...

Ziele dieser Vorlesung

- Verstehen der Grundlagen
- Erklärung von Zusammenhängen (siehe nächste Folie)
- Weiterbildung in Statistik
- Anwendung von R

Zitate

- "Tiefe Kuhfamilien" (Schweizer Bauer - `https://www.schweizerbauer.ch/tiere/milchvieh/eine-komplette-kuh-zuechten-17854.html`)
- "Bei der Auswahl von Kühen für die Zuchtprogramme sollten also auch Eigenleistungen, Leistungen von Vorfahren und die Blutlinien stimmen." (swissherdbookbulletin 5/15)
- "Ich habe noch niemanden getroffen, der mir diese Zuchtwerte erklären kann. Eine Kuh von mir hat einen Zuchtwert von -900 und gibt immer noch Milch." (Leserbrief im Schweizer Bauer)

Informationen

- Webseite: `http://charlotte-ngs.github.io/LBGHS2016`
- Kreditpunkte: Schriftliche Prüfung am 23.12.2016

Ablauf einer Vorlesung

- Typ G im Vorlesungsverzeichnis
- Ab kommender Woche:
  - U: 9-10
  - V: 10-12 (Besprechung der Übung, neuer Stoff)

Vorlesungsprogramm

Woche	Datum	Thema
1	23.09	Einführung, Lineare Algebra, R
2	30.09	Repetition Quantitative Genetik
3	07.10	Selektionsindex
4	14.10	keine Vorlesung
5	21.10	Inverse Verwandtschaftsmatrix
6	28.10	Varianzanalyse
7	04.11	Varianzkomponentenschätzung
8	11.11	BLUP I
9	18.11	BLUP II
10	25.11	Linkage disequilibrium
11	02.12	Genomische Selektion
12	09.12	Genom-weite Assoziationsstudien
13	16.12	Reserve, Fragen
14	23.12	Prüfung

Voraussetzungen für diese Vorlesung

- Keine
- Konzepte und Grundbegriffe werden erklärt
- Hilfreich sind
  - Kenntnisse in Quantitativer Genetik
  - Statistik
  - Lineare Algebra
  - Erfahrungen mit R

Übungen

- Zu jedem Vorlesungsblock wird es eine Übung geben
- Übungsstunde steht zur Bearbeitung der Aufgaben zur Verfügung
- Lösungsvorschläge eine Woche nach der Übung
- Stil der Übungsaufgaben: Bearbeitung einer Fragestellung mit R (oder anderer Programmiersprache)

Ihre Erfahrungen

- Kennen Sie eine/mehrere Programmiersprachen, wenn ja welche?
- Wie erledigen Sie Datenverarbeitungsjobs? (Semesterarbeit, Praktika, Bachelorarbeit)
- Was hat Sie bis jetzt daran gehindert das Programmieren zu erlernen?
- In welchen Veranstaltungen (Vorlesungen, Übungen, Praktika) wurden Sie schon mit Programmiersprachen konfrontiert und was sind Ihre Erfahrungen

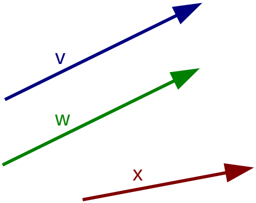
Lineare Algebra

Wichtige Elemente aus der linearen Algebra

- Vektoren
- Matrizen
- Gleichungssysteme

Was ist ein Vektor

Vektoren sind bestimmt durch **Länge** und **Richtung**

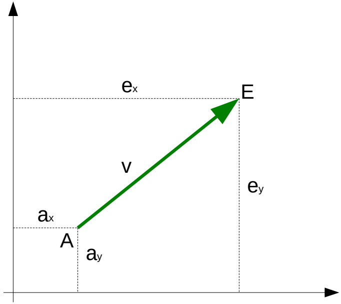


$\rightarrow$ Vektoren v und w sind gleich $v = w$, Vektor x ist verschieden von den beiden anderen, $v \neq x$, $w \neq x$

Koordinaten

Differenz zwischen Koordinaten des Endpunktes minus Koordinaten des Anfangspunktes

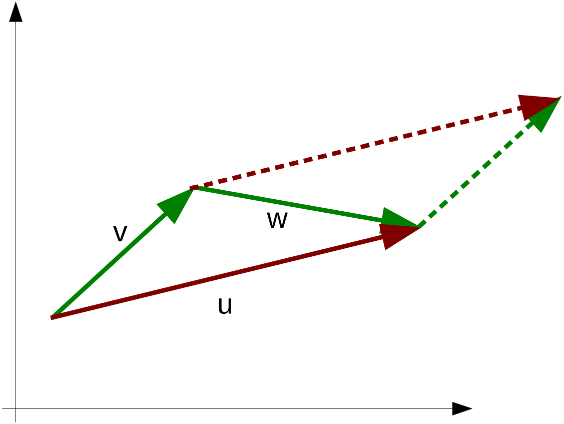
$$v = \begin{bmatrix} e_x - a_x \\ e_y - a_y \end{bmatrix}$$



Operationen mit Vektoren

- Addition
- Subtraktion
- Multiplikation mit Skalar
- Skalarprodukt

Addition

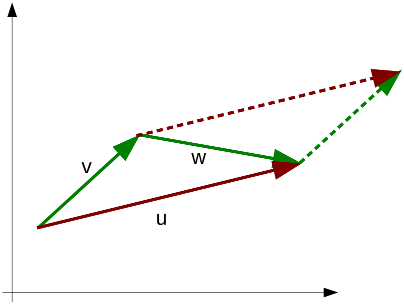


$\rightarrow$ Zusammensetzen der Pfeile: $u = v + w = w + v$

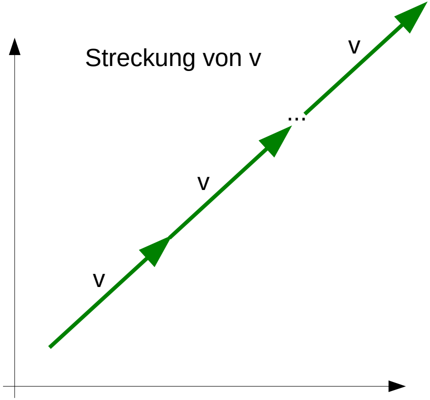
Subtraktion

Aus Addition $u = v + w$ folgt, dass

- $u - v = w$
- $u - w = v$



Multiplikation mit einem Skalar



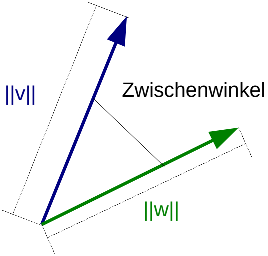
$$u = \lambda * v = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda * v_x \\ \lambda * v_y \end{bmatrix}$$

Multiplikation mit einem Skalar II

Faktor	Richtung	Länge
$\lambda < -1$	entgegengesetzt	länger
$\lambda = -1$	entgegengesetzt	gleich
$-1 < \lambda < 0$	entgegengesetzt	kürzer
$\lambda = 0$	unbestimmt	kürzer
$0 < \lambda < 1$	gleich	kürzer
$\lambda = 1$	gleich	gleich
$\lambda > 1$	gleich	länger

Skalarprodukt

$$v \cdot w = ||v|| * ||w|| * cos(\alpha) = v_x * w_x + v_y * w_y$$



$$cos(\alpha) = \frac{v \cdot w}{||v|| * ||w||}$$

Was ist eine Matrix

- Mehrere Vektoren “nebeneinander” gestellt

$$M = \left[\begin{array}{cc} v & w \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} v_x & w_x \\ v_y & w_y \end{array}\right]$$

- Beispiel einer $2 * 3$-Matrix

$$A = \left[\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 7 \end{array}\right]$$

- Element $(A)_{12} = a_{12} = 3$

Matrixoperationen: Addition und Subtraktion

$$S = A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

$$A = S - B = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} - b_{11} & s_{12} - b_{12} \\ s_{21} - b_{21} & s_{22} - b_{22} \end{bmatrix}$$

Matrixmultiplikation

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} * b_{kj}$$

Spezielle Matrizen

- **Nullmatrix**: alle Elemente $o_{ij} = 0$, Neutralelement von Addition und Subtraktion
- **Rechtsmatrix**: $(R)_{ij} = 0$ für alle $i > j$
- **Linksmatrix**: $(L)_{ij} = 0$ für alle $i < j$
- **Einheitsmatrix**: `diag(n)=1`
- **Transponierte**: $(A)_{ij} = (A^T)_{ji}$
- **Inverse**: $A \cdot A^{-1} = I$

Rechenregeln Transponierte

- die Transponierte von A^T:
$$(A^T)^T = A$$
- Summe:
$$(A+B)^T = A^T + B^T$$
- Produkt:
$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$
- Einheitsmatrix:
$$I^T = I$$

Rechenregeln Inverse

- Inverse der Inversen:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

- Produkt:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

- Transponierte:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

- Einheitsmatrix:

$$I^{-1} = I$$

Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 8 \end{aligned} \tag{1}$$

- Welche Werte für x_1 und x_2 erfüllen beide Gleichungen
- Versuch $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$

Lösungsmenge

- keine Lösung

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 5 \end{aligned} \tag{2}$$

- unendlich viele Lösungen: $x_1 = 2$, $x_2 = \alpha$ und $x_3 = \alpha$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \end{aligned} \tag{3}$$

Äquivalenz zwischen Gleichungssystemen

- Gleichungssystem A und B sind äquivalent, falls deren Lösungsmengen gleich
- Operationen zur Erzeugung von äquivalenten Gleichungssystemen
  - Vertauschen der Reihenfolge der Gleichungen
  - Addition eines Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen Gleichung

Beispiel

Zweite Gleichung minus zweimal erste Gleichung

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 8 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5 \\ -x_2 &= -2 \end{aligned} \tag{5}$$

- Dreiecksgestalt $\rightarrow$ einfache Lösung für x_2

Gaussverfahren

- Äquivalenzoperationen bis Gleichungssystem in Dreiecksgestalt
- Rückwärts-Einsetzen der gefundenen Lösungen
- Schema für Gaussverfahren

$$
\begin{array}{|ccc|c|}
\hline
a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\
\hline
\end{array}
$$

Schritt 1

- Vertauschen der Reihenfolge bis $a_{11} \neq 0$
- Von zweiter a_{21}/a_{11}-fache der ersten abziehen
- Von dritter a_{31}/a_{11}-fache der ersten abziehen

$$\left|\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & b_3^{(2)} \end{array}\right|$$

Schritt 2

- Analog zu Schritt 1 bis

$$
\left|\begin{array}{ccc|c}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\
0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & b_2^{(2)} \\
0 & 0 & a_{33}^{(3)} & b_3^{(3)}
\end{array}\right|
$$

Rückwärts-Einsetzen

- Aus dem letzten Schema in Dreiecksgestalt folgt

$$x_3 = b_3^{(3)} / a_{33}^{(3)}$$

- Einsetzen in zweite Gleichung

$$x_2 = \frac{b_2^{(2)} - a_{23}^{(2)} * b_3^{(3)} / a_{33}^{(3)}}{a_{22}^{(2)}}$$

- Einsetzen in erste Gleichung

$$x_1 = \ldots$$

Matrix- und Vektorschreibweise

- Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \tag{6}$$

- Definition der Matrix A und der Vektoren x und b

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},\ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ und } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

- Gleichung kann als $A \cdot x = b$ geschrieben werden

Vorteile

- Notation ist unabhängig von Anzahl Unbekannten und Anzahl Gleichungen
- Eigenschaften von Vektoren und Matrizen können auf Gleichungssystem angewendet werden
- Lösung einfach darstellbar als

$$x = A^{-1} \cdot b$$