Züchtungslehre - Eigenschaften von BLUP-Zuchtwerten

Peter von Rohr

2016-11-18

Vergleich verschiedener Zuchtwertschätzmethoden

- Einige Methoden zur Schätzung / Vorhersage von Zuchtwerten
  - Zuchtwerte aufgrund von Eigenleistungen
  - Zuchtwerte aufgrund von Nachkommenleistungen
  - BLUP Zuchtwertschätzung mit Vatermodell
  - BLUP Zuchtwertschätzung mit Tiermodell
- Vergleich zwischen Methoden
  - Vor- und Nachteile
  - Welche Tiere bekommen Zuchtwerte
  - Berücksichtigung der Umwelt
  - Verwandtschaft

Daten

- Merkmal: Zunahmen bis zu Absetzen
- Folgende Tabelle gibt eine Übersicht über das Datenmaterial

Kalb	Geschlecht	Vater	Mutter	WWG
4	M	1	NA	4.5
5	F	3	2	2.9
6	F	1	2	3.9
7	M	4	5	3.5
8	M	3	6	5.0

- Varianzkomponenten: $\sigma_e^2 = 40$ und $\sigma_a^2 = 20$.

Eigenleistungen

- Geschätzter Zuchtwert $\hat{a}_i = h^2(y_i - \mu)$

Tier	Zuchtwert
4	0.180
5	-0.353
6	-0.020
7	-0.153
8	0.347

- Annahme: $\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = 3.96$
- Nur Tiere mit Eigenleistung bekommen Zuchtwerte
- Verwandtschaft nicht berücksichtigt
- Abgesehen von μ keine Umwelteffekte berücksichtigt

Nachkommenleistungen

- Geschätzter Zuchtwert: $\hat{a} = \frac{2n}{n+k}(\tilde{y} - \mu)$

Tier	n	y	BV
1	2	4.20	0.074
2	2	3.40	-0.172
3	2	3.95	-0.003

- n steht für die Anzahl Nachkommen
- $k = \frac{4-h^2}{h^2}$

Vatermodell

- Vorläufer des Tiermodells, immer noch verwendet
- Lineares gemischtes Modell
  - fixe Effekte analog zum Tiermodell
  - Vatereffekte s als zufällige Effekte
- Verwandtschaften nur über Väter
- nur Väter bekommen Zuchtwerte
- Modell

$$y = Xb + Zs + e$$

wobei $var(s) = A * \sigma_s^2$

- σ_s^2: Varianz der Vatereffekte mit $\sigma_s^2 = \frac{1}{4}\sigma_a^2$

Beispiel

- Gleicher Datensatz, wie beim Tiermodell

Kalb	Geschlecht	Vater	Mutter	WWG
4	M	1	NA	4.5
5	F	3	NA	2.9
6	F	1	NA	3.9
7	M	4	NA	3.5
8	M	3	NA	5.0

- Ziele:
  - Schätzung der fixen Effekte für das Geschlecht
  - Vorhersage der Zuchtwerte für Väter

Inzidenzmatrizen

- X gleich wie beim Tiermodell
- Z verknüpft Beobachtungen zu Vatereffekten s

$$
Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

Verwandtschaft nur über Väter

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1.333 & 0.000 & -0.667 \\ 0.000 & 1.000 & 0.000 \\ -0.667 & 0.000 & 1.333 \end{bmatrix}$$

Mischmodellgleichungen

$$\begin{bmatrix} 3.000 & 0.000 & 1.000 & 1.000 & 1.000 \\ 0.000 & 2.000 & 1.000 & 1.000 & 0.000 \\ 1.000 & 1.000 & 16.663 & 0.000 & -7.337 \\ 1.000 & 1.000 & 0.000 & 13.000 & 0.000 \\ 1.000 & 0.000 & -7.337 & 0.000 & 15.663 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{s}_1 \\ \hat{s}_2 \\ \hat{s}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13.0 \\ 6.8 \\ 8.4 \\ 7.9 \\ 3.5 \end{bmatrix}$$

Lösungen

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{s}_1 \\ \hat{s}_2 \\ \hat{s}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.336 \\ 3.382 \\ 0.022 \\ 0.014 \\ -0.043 \end{bmatrix}$$

Vergleich: Tiermodell - Vatermodell

Effekt	Tiermodell	Vatermodell
M	4.36	4.34
F	3.40	3.38

- Schätzungen der Effekte verschieden
- Differenzen zwischen Schätzungen gleich

Zuchtwerte

Tier	Tiermodell	Vatermodell
1	0.098	0.022
2	-0.019	NA
3	-0.041	0.014
4	-0.009	-0.043
5	-0.186	NA
6	0.177	NA
7	-0.249	NA
8	0.183	NA

- Im Vatermodell bekommen nur Väter Zuchtwerte
- Rangierung verschieden zwischen Tier- und Vatermodell
- Im Tiermodell werden Paarungspartner und alle Nachkommen berücksichtigt

Zerlegung von geschätzten Zuchtwerten mit Tiermodell

- einfaches Modell

$$y_i = \mu + a_i + e_i \tag{1}$$

mit

y_i	Beobachtung für Tier i
a_i	Zuchtwert von Tier i mit Varianz $(1 + F_i)\sigma_a^2$
e_i	zufälliger Rest mit Varianz σ_e^2
μ	übrige fixe Effekte im Modell

- jedes Tier nur eine Beobachtung
- Tier i hat Eltern s und d
- Tier i hat n Nachkommen k_j (wobei $j = 1, \ldots, n$)
- Tier i hat n Paarungspartner l_j (wobei $j = 1, \ldots, n$)

Zerlegung

$$
\begin{aligned}
y_i &= \hat{\mu} + \left[1 + \alpha\delta^{(i)} + \frac{\alpha}{4}\sum_{j=1}^{n}\delta^{(k_j)} \right]\hat{a}_i - \frac{\alpha}{2}\delta^{(i)}\hat{a}_s - \frac{\alpha}{2}\delta^{(i)}\hat{a}_d \\
&\quad - \frac{\alpha}{2}\sum_{j=1}^{n}\delta^{(k_j)}\hat{a}_{k_j} + \frac{\alpha}{4}\sum_{j=1}^{n}\delta^{(k_j)}\hat{a}_{l_j} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Lösen wir die Gleichung (2) nach $\hat{a}_i$ auf so folgt

$$
\begin{aligned}
\hat{a}_i &= \frac{1}{1 + \alpha\delta^{(i)} + \frac{\alpha}{4}\sum_{j=1}^{n}\delta^{(k_j)}} \Bigg[y_i - \hat{\mu} \\
&\quad + \frac{\alpha}{2}\left\{ \delta^{(i)}(\hat{a}_s + \hat{a}_d) + \sum_{j=1}^{n}\delta^{(k_j)}(\hat{a}_{k_j} - \frac{1}{2}\hat{a}_{l_j}) \right\} \Bigg] \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Regeln für A^{-1}

- Für Tier i mit Eltern s und d,
  - addiere δ_i zum Element (i, i),
  - addiere $-\delta_i/2$ zu (s, i), (i, s), (d, i) und (i, d)
  - addiere $\delta_i/4$ zu (s, s), (s, d), (d, s) und (d, d)
- Für Tier i mit bekanntem Elternteil d,
  - addiere δ_i zum Element (i, i),
  - addiere $-\delta_i/2$ zu den Elementen (d, i) und (i, d) und
  - addiere $\delta_i/4$ zu den Elementen (d, d)
- Für Tier i mit unbekannten Eltern
  - addiere δ_i zum Element (i, i)
- Ohne Inzucht ist

$$\delta_i = \begin{cases} 2 & \text{bei bekannten Eltern} \\ 4/3 & \text{bei einem bekannten Elternteil} \\ 1 & \text{bei unbekannten Eltern} \end{cases}$$

Ein Beispiel

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X^T X = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$$

$$X^T Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Z^T Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rechte Handseite

$$X^T y = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} y_i \end{bmatrix}$$

$$Z^T y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}$$

Pedigree

```
##   sire  dam
## 1 <NA> <NA>
## 2 <NA> <NA>
## 3 <NA> <NA>
## 4    1    2
## 5    4    3
```

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1.50 & 0.50 & 0.00 & -1.00 & 0.00 \\ 0.50 & 1.50 & 0.00 & -1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 1.50 & 0.50 & -1.00 \\ -1.00 & -1.00 & 0.50 & 2.50 & -1.00 \\ 0.00 & 0.00 & -1.00 & -1.00 & 2.00 \end{bmatrix}$$

Mischmodellgleichungen (MMG)

$$\begin{bmatrix} 5.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 \\ 1.00 & 4.00 & 1.00 & 0.00 & -2.00 & 0.00 \\ 1.00 & 1.00 & 4.00 & 0.00 & -2.00 & 0.00 \\ 1.00 & 0.00 & 0.00 & 4.00 & 1.00 & -2.00 \\ 1.00 & -2.00 & -2.00 & 1.00 & 6.00 & -2.00 \\ 1.00 & 0.00 & 0.00 & -2.00 & -2.00 & 5.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \\ \hat{a}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19.8 \\ 4.5 \\ 2.9 \\ 3.9 \\ 3.5 \\ 5.0 \end{bmatrix}$$

- Beispiel: Beobachtung für Tier 4

Gleichung der Beobachtung y_4 für Tier 4

$$
\begin{bmatrix}
5.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 \\
1.00 & 4.00 & 1.00 & 0.00 & -2.00 & 0.00 \\
1.00 & 1.00 & 4.00 & 0.00 & -2.00 & 0.00 \\
1.00 & 0.00 & 0.00 & 4.00 & 1.00 & -2.00 \\
1.00 & -2.00 & -2.00 & 1.00 & 6.00 & -2.00 \\
1.00 & 0.00 & 0.00 & -2.00 & -2.00 & 5.00
\end{bmatrix}
\boxed{\begin{bmatrix}
\mu \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \\ \hat{a}_5
\end{bmatrix}}
=
\begin{bmatrix}
19.8 \\ 4.5 \\ 2.9 \\ 3.9 \\ \boxed{3.5} \\ 5.0
\end{bmatrix}
$$

Zerlegung für Tier 4

- Eltern 1 und 2
- Nachkomme 5
- Paarungspartner 3
- $\alpha = 2$

$$y_4 = \hat{\mu} + (-2) * \hat{a}_1 + (-2) * \hat{a}_2 + (1) * \hat{a}_3 + (6) * \hat{a}_4 + (-2) * \hat{a}_5$$

- nach $\hat{a}_4$ aufgelöst bekommen wir

$$\hat{a}_4 = \frac{1}{6}\left[y_4 - \hat{\mu} + 2 * \hat{a}_1 + 2 * \hat{a}_2 - \hat{a}_3 + 2 * \hat{a}_5\right]$$

Komponenten der Zerlegung

- Tier:

$$\left[1 + \alpha\delta^{(i)} + \frac{\alpha}{4}\sum_{j=1}^{n}\delta^{(k_j)}\right]^{-1} = [1 + 2 * 2 + 0.5 * 2]^{-1} = 1/6$$

- Eltern:

$$\frac{\alpha}{2}\left\{\delta^{(i)}(\hat{a}_s + \hat{a}_d)\right\} = \frac{2}{2}\{2(\hat{a}_1 + \hat{a}_2)\} = 2(\hat{a}_1 + \hat{a}_2)$$

- Nachkommen:

$$\frac{\alpha}{2}\sum_{j=1}^{n}\delta^{(k_j)}\hat{a}_{k_j} = \frac{2}{2} * 2 * \hat{a}_5 = 2 * \hat{a}_5$$

- Paarungspartner:

$$-\frac{\alpha}{2}\sum_{j=1}^{n}\delta^{(k_j)}\frac{1}{2}\hat{a}_{l_j} = -\frac{2}{2} * 2 * \frac{1}{2}\hat{a}_3 = -\hat{a}_3$$

Weshalb die Vergleiche?

- Wie werden Tier ausgewählt?
- Was wird berücksichtigt bei der Auswahl
- Was geben die ausgewählten Tiere weiter an Nachkommen?

Zusammenfassung

- Eigenleistung

$$\hat{a}_i = h^2(y_i - \mu)$$

- Nachkommen

$$\hat{a}_i = \frac{2n}{n+k}(\bar{y}_i - \mu)$$

- BLUP-Tiermodell

$$\begin{aligned} \hat{a}_i \quad = \quad & \left[1 + \alpha\delta^{(i)} + \frac{\alpha}{4}\sum_{j=1}^{n}\delta^{(k_j)}\right]^{-1} \left[y_i - \hat{\mu}\right. \\ & \left. + \frac{\alpha}{2}\left\{\delta^{(i)}(\hat{a}_s + \hat{a}_d) + \sum_{j=1}^{n}\delta^{(k_j)}\left(\hat{a}_{k_j} - \frac{1}{2}\hat{a}_{l_j}\right)\right\}\right] \end{aligned}$$