

Züchtungslehre - Berechnung der Inzucht

Peter von Rohr

2016-11-04

Einleitung

Im Kapitel **Inverse Verwandtschaftsmatrix** haben wir besprochen, wie die inverse Verwandtschaftsmatrix direkt aufgestellt werden kann. Die verwendete Methode basiert auf der LDL-Zerlegung der Matrix A , wobei die Inversen der Matrizen L und D einfacher zu berechnen sind als jene von A .

Die Inverse D^{-1} ist eine Diagonalmatrix, deren Elemente von den Inzuchtkoeffizienten der Tiere abhängen. Die Inzuchtkoeffizienten erscheinen auf der Diagonalen der Verwandtschaftsmatrix. Also müssten wir für die Berechnung der Inzuchtkoeffizienten die komplette Verwandtschaftsmatrix aufstellen. Für sehr grosse Populationen ist das zu aufwändig. Wir brauchen also eine effizientere Methode zur Berechnung der Inzuchtkoeffizienten.

Berechnung der Inzuchtkoeffizienten

Grundsätzlich gibt es zwei Arten die Inzuchtkoeffizienten zu berechnen, ohne die gesamte Verwandtschaftsmatrix aufzustellen.

1. Cholesky-Zerlegung der Verwandtschaftsmatrix
2. Pfadkoeffizientenmethode

Cholesky-Zerlegung der Verwandtschaftsmatrix

Die Bezeichnung dieser Methode ist etwas irreführend, da wir ja die Verwandtschaftsmatrix explizit nicht kennen und deshalb auch nicht zerlegen können. Viel mehr wollen wir günstige Eigenschaften der Cholesky-Zerlegung der Verwandtschaftsmatrix ausnützen um die Inzuchtkoeffizienten effizient berechnen zu können. Zur Ableitung der Eigenschaften der Cholesky-Zerlegung, nehmen wir vorübergehend an, dass wir die Verwandtschaftsmatrix A kennen.

Bei bekannter Verwandtschaftsmatrix A ist deren Cholesky-Zerlegung definiert als

$$A = R * R^T \tag{1}$$

wobei R eine linke untere Dreiecksmatrix ist. Aufgrund der Dreiecksstruktur von R lassen sich die Diagonalelemente von A berechnen als Summen der quadrierten Elemente von R bis zur Diagonalen. Als Formel bedeutet das

$$a_{ii} = \sum_{j=1}^i r_{ij}^2 \tag{2}$$

Für ein kleines Beispiel einer 3×3 Matrix A sieht das wie folgt aus

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & 0 & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ 0 & r_{22} & r_{32} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{bmatrix}$$

Für das gezeigte Beispiel berechnen wir die Diagonalelemente von A als

$$\begin{aligned} a_{11} &= r_{11}^2 \\ a_{22} &= r_{21}^2 + r_{22}^2 \\ a_{33} &= r_{31}^2 + r_{32}^2 + r_{33}^2 \end{aligned}$$

Die Gleichung (2) zeigt, wie die Diagonalelemente a_{ii} der Verwandtschaftsmatrix A und somit die Inzuchtcoeffizienten aufgrund einer Zeile aus der Matrix R berechnet werden können. Als nächstes müssen wir klären, wie die Elemente der Matrix R berechnet werden können.

Rekursive Berechnung der Matrix R

Wir setzen die LDL-Zerlegung der Verwandtschaftsmatrix A der Cholesky-Zerlegung von A gleich.

$$A = R * R^T = L * D * L^T \quad (3)$$

Schreiben wir die Matrix R als Produkt aus den Matrizen L und S und setzen das in Gleichung (3) ein, dann folgt

$$A = R * R^T = L * S * (L * S)^T = L * S * S^T * L^T = L * D * L^T \quad (4)$$

Aus Gleichung (4) sehen wir, dass

$$D = S * S^T$$

und somit ist S eine Diagonalmatrix deren Elemente gegeben ist durch $s_{ii} = \sqrt{d_{ii}}$. Schauen wir uns die Zerlegung

$$R = L * S$$

der Matrix R an unserem kleinen 3×3 Beispiel an

$$\begin{bmatrix} r_{11} & 0 & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} s_{11} & 0 & 0 \\ 0 & s_{22} & 0 \\ 0 & 0 & s_{33} \end{bmatrix} \quad (5)$$

wird klar, dass aufgrund der speziellen Strukturen von L und S gilt, dass die Diagonalelemente von R den Diagonalelementen von S entsprechen. Es gilt somit

$$r_{ii} = s_{ii} = \sqrt{d_{ii}} \quad (6)$$

Im Kapitel **Inverse Verwandtschaftsmatrix** hatten wir gesehen, dass die Diagonalelemente d_{ii} der Matrix D aufgrund der Inzuchtgrade der Eltern berechnet werden können

$$d_{ii} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} (F_s + F_d) = 1 - 0.25(a_{ss} + a_{dd}) \quad (7)$$

wobei s und d die Eltern von i sind. Die Werte für a_{ss} und a_{dd} werden aufgrund der Gleichung (2) berechnet. Setzen wir das Resultat von (7) in (6) ein, dann folgt

$$r_{ii} = \sqrt{1 - 0.25(a_{ss} + a_{dd})} \quad (8)$$

Aufgrund des kleinen Beispiels in (5) werden Offdiagonalelement r_{ij} der Matrix R berechnet als

$$r_{ij} = l_{ij} * s_{jj} \quad (9)$$

Die Elemente l_{ij} aus Matrix L werden als Durchschnitt der Elemente l_{sj} und l_{dj} berechnet, wobei s und d die Eltern von i sind. Setzen wir dies in (9) ein, dann folgt

$$\begin{aligned} r_{ij} &= l_{ij} * s_{jj} \\ &= \frac{1}{2}(l_{sj} + l_{dj}) * s_{jj} \\ &= \frac{1}{2}(r_{sj} + r_{dj}) \end{aligned} \quad (10)$$

wobei wir im letzten Schritt von (10) die Definition aus (9) umgekehrt angewendet haben.

Somit haben wir die Diagonalelemente r_{ii} und r_{ij} rekursiv berechnet. Unter der gängigen Bedingung, dass im Pedigree die Tiere nach ihrem Alter sortiert sein müssen, können wir die Rekursionen auflösen.

Unser Beipielpedigree

Das Beispielpedigree aus dem Kapitel **Inverse Verwandtschaftsmatrix** soll hier nochmals verwendet werden, um die Berechnung der Inzuchtkoeffizienten zu zeigen.

```
##  sire  dam
##  1 <NA> <NA>
##  2 <NA> <NA>
##  3    1    2
##  4    1 <NA>
##  5    4    3
##  6    5    2
```

Wir wollen nun die Diagonalelemente a_{11} bis a_{66} und damit die Inzuchtkoeffizienten F_1 bis F_6 berechnen ohne die gesamte Verwandtschaftsmatrix A aufstellen zu müssen.

Tier 1

Wir beginnen mit Tier 1 und dem entsprechenden Element a_{11} . Da Tier 1 keine bekannten Eltern hat, ist es auch nicht ingezüchtet. Somit ist $F_1 = 0$ und

$$a_{11} = 1 + F_1 = 1$$

Tier 2

Den Inzuchtgrad für Tier 2 wird aufgrund von a_{22} berechnet. Dazu verwenden wir die Gleichung (2}). Somit ist

$$a_{22} = r_{21}^2 + r_{22}^2$$

Da die Eltern von Tier 2 unbekannt sind, sind die Terme r_{sj} und r_{dj} aus (10) beide gleich 0 und somit ist auch $r_{21} = 0$. Da die Eltern von Tier 2 beide unbekannt sind, ist $r_{22} = 1$ und somit folgt

$$a_{22} = r_{21}^2 + r_{22}^2 = 0 + 1 = 1$$

Tier 3

Die Berechnung des Diagonalelements a_{33} erfordert die Elemente r_{31} , r_{32} und r_{33} . Dabei berücksichtigen wir, dass Tier 3 die Tiere 1 und 2 als Eltern hat.

$$r_{31} = \frac{1}{2}(r_{11} + r_{21}) = \frac{1}{2}(1 + 0) = 0.5$$

$$r_{32} = \frac{1}{2}(r_{12} + r_{22}) = \frac{1}{2}(0 + 1) = 0.5$$

Für das Diagonalelement r_{33} verwenden wir die Gleichung (8)

$$r_{33} = \sqrt{1 - 0.25(a_{11} + a_{22})} = \sqrt{1 - 0.25(1 + 1)} = \sqrt{0.5} = 0.7071068$$

Das Diagonalelement a_{33} der Verwandtschaftsmatrix A für Tier 3 kann nun berechnet werden als

$$a_{33} = r_{31}^2 + r_{32}^2 + r_{33}^2 = 0.5^2 + 0.5^2 + 0.7071068^2 = 1$$

Tier 4

Bei Tier 4 haben wir eine spezielle Situation, da die Mutter unbekannt ist. Somit ist klar, dass der Inzuchtgrad $F_4 = 0$ ist und somit $a_{44} = 1$. Da das Tier 4 Nachkommen hat, berechnen wir aber trotzdem noch die Elemente auf der Zeile 4 in der Matrix R .

$$r_{41} = \frac{1}{2} * r_{11} = \frac{1}{2} * 1 = 0.5$$

$$r_{42} = \frac{1}{2} * r_{12} = \frac{1}{2} * 0 = 0$$

$$r_{43} = \frac{1}{2} * r_{13} = \frac{1}{2} * 0 = 0$$

$$r_{44} = \sqrt{1 - \frac{1}{4} * a_{11}} = \sqrt{1 - \frac{1}{4} * 1} = 0.8660254$$

Tiere 5 und 6

Bei den Tieren 5 und 6 sind die Berechnungen vergleichbar mit Tier 3. Folgende Schritte sind nötig für die Berechnung der Inzuchtgrade F_5 und F_6 .

$$r_{51} = \frac{1}{2}(r_{41} + r_{31}) = \frac{1}{2}(0.5 + 0.5) = 0.5$$

$$r_{52} = \frac{1}{2}(r_{42} + r_{32}) = \frac{1}{2}(0 + 0.5) = 0.25$$

$$r_{53} = \frac{1}{2}(r_{43} + r_{33}) = \frac{1}{2}(0 + 0.7071068) = 0.3535534$$

$$r_{54} = \frac{1}{2}(r_{44} + r_{34}) = \frac{1}{2}(0.8660254 + 0) = 0.4330127$$

$$r_{55} = \sqrt{1 - 0.25 * (a_{44} + a_{33})} = \sqrt{1 - 0.25 * (1 + 1)} = 0.7071068$$

$$a_{55} = r_{51}^2 + r_{52}^2 + r_{53}^2 + r_{54}^2 + r_{55}^2 = 1.125$$

$$r_{61} = \frac{1}{2}(r_{51} + r_{21}) = \frac{1}{2}(0.5 + 0) = 0.25$$

$$r_{62} = \frac{1}{2}(r_{52} + r_{22}) = \frac{1}{2}(0.25 + 1) = 0.625$$

$$r_{63} = \frac{1}{2}(r_{53} + r_{23}) = \frac{1}{2}(0.3535534 + 0) = 0.1767767$$

$$r_{64} = \frac{1}{2}(r_{54} + r_{24}) = \frac{1}{2}(0.4330127 + 0) = 0.2165064$$

$$r_{65} = \frac{1}{2}(r_{55} + r_{25}) = \frac{1}{2}(0.7071068 + 0) = 0.3535534$$

$$r_{66} = \sqrt{1 - 0.25 * (a_{55} + a_{22})} = \sqrt{1 - 0.25 * (1.125 + 1)} = 0.6846532$$

$$a_{66} = r_{61}^2 + r_{62}^2 + r_{63}^2 + r_{64}^2 + r_{65}^2 + r_{66}^2 = 1.125$$

Zusammenfassung der Ergebnisse

Als Zusammenfassung stellen wir die Ergebnisse in einer Tabelle zusammen.

TierId	Diagonalelement	Inzuchtkoeffizient
1	1.000	0.000
2	1.000	0.000
3	1.000	0.000
4	1.000	0.000
5	1.125	0.125
6	1.125	0.125