

Berechnung der Inzuchtkoeffizienten

Peter von Rohr

2017-11-03

Inverse von A

- ▶ LDL-Zerlegung von A führt zu

$$A^{-1} = L^{-1} * D^{-1} * (L^T)^{-1}$$

- ▶ Matrix D abhängig von Inzuchtkoeffizienten
- ▶ Inzuchtkoeffizienten sind auf Diagonalen von A
- ▶ Aufstellen der ganzen A ???

Berechnung der Inzuchtkoeffizienten

- ▶ Cholesky-Zerlegung von A
- ▶ Pfadkoeffizienten aufgrund der Definition, alle Pfade über gemeinsame Ahnen (nicht weiter ausgeführt)

Cholesky-Zerlegung von A

- ▶ Definition: Zerlegung von A in

$$A = R * R^T$$

wobei R linke untere Dreiecksmatrix

- ▶ In R: Funktion `chol()` liefert transponierte von R

Kleines Beispiel

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & 0 & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ 0 & r_{22} & r_{32} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{bmatrix}$$

► Diagonalelemente

$$\begin{aligned} a_{11} &= r_{11}^2 \\ a_{22} &= r_{21}^2 + r_{22}^2 \\ a_{33} &= r_{31}^2 + r_{32}^2 + r_{33}^2 \end{aligned}$$

Rekursive Berechnung von R

- ▶ Gleichsetzen der LDL- und der Cholesky-Zerlegung

$$A = R * R^T = L * D * L^T$$

- ▶ Sei $R = L * S$ und setzen das ein, dann folgt

$$A = L * D * L^T = L * S * (L * S)^T = L * S * S^T * L^T$$

- ▶ Somit ist $D = S * S^T$

wobei S eine Diagonalmatrix mit $s_{ii} = \sqrt{d_{ii}}$

Kleines Beispiel

$$\begin{bmatrix} r_{11} & 0 & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} s_{11} & 0 & 0 \\ 0 & s_{22} & 0 \\ 0 & 0 & s_{33} \end{bmatrix}$$

- ▶ Diagonalelemente:

$$r_{ii} = s_{ii} = \sqrt{d_{ii}}$$

- ▶ Off-Diagonal:

$$r_{ij} = l_{ij} * s_{jj} = \frac{1}{2} (r_{sj} + r_{dj})$$

wobei $l_{ij} = \frac{1}{2} (l_{sj} + l_{dj})$

Unser Beipielpedigree

```
##   sire  dam
## 1 <NA> <NA>
## 2 <NA> <NA>
## 3    1    2
## 4    1 <NA>
## 5    4    3
## 6    5    2
```

- ▶ Aufgabe: Berechne Diagonalelemente von A

Tier 1

- ▶ Element a_{11}
- ▶ keine bekannten Eltern
- ▶ somit nicht ingezüchtet $\rightarrow F_1 = 0$ und

$$a_{11} = 1 + F_1 = 1$$

- ▶ Da $a_{11} = r_{11}^2$ folgt $r_{11} = 1$

Tier 2

- ▶ Anwendung der Formel für Diagonalelemente a_{ii}

$$a_{22} = r_{21}^2 + r_{22}^2$$

- ▶ Eltern von Tier 2 unbekannt, $\rightarrow r_{sj} = 0$ und $r_{dj} = 0$

$$r_{21} = 0$$

- ▶ Eltern von Tier 2 beide unbekannt

$$r_{22} = 1$$

$$a_{22} = r_{21}^2 + r_{22}^2 = 0 + 1 = 1$$

Tier 3

- ▶ Diagonalelement a_{33} aus Elementen r_{31} , r_{32} und r_{33}
- ▶ Tier 3 hat Eltern 1 und 2

$$r_{31} = \frac{1}{2}(r_{11} + r_{21}) = \frac{1}{2}(1 + 0) = 0.5$$

$$r_{32} = \frac{1}{2}(r_{12} + r_{22}) = \frac{1}{2}(0 + 1) = 0.5$$

$$r_{33} = \sqrt{1 - 0.25(a_{11} + a_{22})} = \sqrt{1 - 0.25(1 + 1)} = \sqrt{0.5} = 0.7071068$$

$$a_{33} = r_{31}^2 + r_{32}^2 + r_{33}^2 = 0.5^2 + 0.5^2 + 0.7071068^2 = 1$$

Tier 4

- ▶ Mutter unbekannt
- ▶ Inzuchtkoeffizient $F_4 = 0$ und $a_{44} = 1$
- ▶ da Tier 4 Nachkommen hat, müssen Elemente auf Zeile 4 in Matrix R berechnet werden

$$r_{41} = \frac{1}{2} * r_{11} = \frac{1}{2} * 1 = 0.5$$

$$r_{42} = \frac{1}{2} * r_{12} = \frac{1}{2} * 0 = 0$$

$$r_{43} = \frac{1}{2} * r_{13} = \frac{1}{2} * 0 = 0$$

$$r_{44} = \sqrt{1 - \frac{1}{4} * a_{11}} = \sqrt{1 - \frac{1}{4} * 1} = 0.8660254$$

Tier 5

$$r_{51} = \frac{1}{2}(r_{41} + r_{31}) = \frac{1}{2}(0.5 + 0.5) = 0.5$$

$$r_{52} = \frac{1}{2}(r_{42} + r_{32}) = \frac{1}{2}(0 + 0.5) = 0.25$$

$$r_{53} = \frac{1}{2}(r_{43} + r_{33}) = \frac{1}{2}(0 + 0.7071068) = 0.3535534$$

$$r_{54} = \frac{1}{2}(r_{44} + r_{34}) = \frac{1}{2}(0.8660254 + 0) = 0.4330127$$

$$r_{55} = \sqrt{1 - 0.25 * (a_{44} + a_{33})} = \sqrt{1 - 0.25 * (1 + 1)} = 0.7071068$$

$$a_{55} = r_{51}^2 + r_{52}^2 + r_{53}^2 + r_{54}^2 + r_{55}^2 = 1.125$$

Tier 6

$$r_{61} = \frac{1}{2}(r_{51} + r_{21}) = \frac{1}{2}(0.5 + 0) = 0.25$$

$$r_{62} = \frac{1}{2}(r_{52} + r_{22}) = \frac{1}{2}(0.25 + 1) = 0.625$$

$$r_{63} = \frac{1}{2}(r_{53} + r_{23}) = \frac{1}{2}(0.3535534 + 0) = 0.1767767$$

$$r_{64} = \frac{1}{2}(r_{54} + r_{24}) = \frac{1}{2}(0.4330127 + 0) = 0.2165064$$

$$r_{65} = \frac{1}{2}(r_{55} + r_{25}) = \frac{1}{2}(0.7071068 + 0) = 0.3535534$$

$$r_{66} = \sqrt{1 - 0.25 * (a_{55} + a_{22})} = \sqrt{1 - 0.25 * (1.125 + 1)} = 0.6846532$$

Zusammenfassung der Ergebnisse

Tier	Diagonalelement	Inzuchtkoeffizient
1	1.000	0.000
2	1.000	0.000
3	1.000	0.000
4	1.000	0.000
5	1.125	0.125
6	1.125	0.125