

Mischmodellgleichungen

Peter von Rohr

08/12/2017

In der Vorlesung haben wir gezeigt, wie wir zu folgendem Datensatz die Mischmodellgleichungen aufstellen und lösen können. Wir haben dies mit ein paar R-statements gemacht, welche hier nochmals gezeigt werden.

Daten

Die Daten als dataframe gegeben.

```
nNrAniInPed <- 8
nIdxFirstAniWithData <- 4
dfWwg <- data.frame(Kalb = c(nIdxFirstAniWithData:nNrAniInPed),
  Geschlecht = c("M","F","F","M","M"),
  Vater = c(1,3,1,4,3),
  Mutter = c(NA,2,2,5,6),
  WWG = c(4.5,2.9,3.9,3.5,5.0))
```

Als Tabelle sehen die Daten wie folgt aus:

Kalb	Geschlecht	Vater	Mutter	WWG
4	M	1	NA	4.5
5	F	3	2	2.9
6	F	1	2	3.9
7	M	4	5	3.5
8	M	3	6	5.0

Varianzkomponenten

Die für die Mischmodellgleichungen benötigten Varianzkomponenten lauten wie folgt.

```
sigmae2 <- 40
sigmaa2 <- 20
alpha <- sigmae2/sigmaa2
```

Pedigree

Wie schon im Abschnitt Daten gezeigt, sind die Tiere verwandt miteinander. Aufgrund der angegebenen Verwandtschaft kann das folgende Pedigree aufgestellt werden.

```
suppressPackageStartupMessages(library(pedigreemm))
(ped <- pedigree(sire = c(NA,NA,NA,1,3,1,4,3), dam = c(NA,NA,NA,NA,2,2,5,6), label = c(1:8)))
```

```
##  sire  dam
## 1 <NA> <NA>
## 2 <NA> <NA>
## 3 <NA> <NA>
## 4    1 <NA>
```

```
## 5 3 2
## 6 1 2
## 7 4 5
## 8 3 6
```

Aufgrund des Pedigrees können wir die inverse Verwandtschaftsmatrix A^{-1} wie folgt aufstellen

```
(Ainv <- as.matrix(getAInv(ped)))

##          1  2  3          4  5  6  7  8
## 1  1.8333333 0.5 0.0 -0.6666667 0.0 -1.0 0 0
## 2  0.5000000 2.0 0.5  0.0000000 -1.0 -1.0 0 0
## 3  0.0000000 0.5 2.0  0.0000000 -1.0 0.5 0 -1
## 4 -0.6666667 0.0 0.0  1.8333333 0.5 0.0 -1 0
## 5  0.0000000 -1.0 -1.0 0.5000000 2.5 0.0 -1 0
## 6 -1.0000000 -1.0 0.5  0.0000000 0.0 2.5 0 -1
## 7  0.0000000 0.0 0.0 -1.0000000 -1.0 0.0 2 0
## 8  0.0000000 0.0 -1.0  0.0000000 0.0 -1.0 0 2
```

Mischmodellgleichungen

Koeffizientenmatrix M

Für die Koeffizientenmatrix müssen wir zuerst die Inzidenzmatrizen X und Z aufstellen.

```
(X <- matrix(data = c(1, 0,
                     0, 1,
                     0, 1,
                     1, 0,
                     1, 0), ncol = 2, byrow = TRUE))
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]  1   0
## [2,]  0   1
## [3,]  0   1
## [4,]  1   0
## [5,]  1   0
```

```
(Z <- cbind(matrix(data = 0, nrow = 5, ncol = 3), diag(5)))
```

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8]
## [1,]  0   0   0   1   0   0   0   0
## [2,]  0   0   0   0   1   0   0   0
## [3,]  0   0   0   0   0   1   0   0
## [4,]  0   0   0   0   0   0   1   0
## [5,]  0   0   0   0   0   0   0   1
```

Die vier Unter-Matrizen von M lauten

1. $X^T X$

```
(XTX <- t(X) %*% X)
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]  3   0
## [2,]  0   2
```

2. $X^T Z$

```
(XTZ <- t(X) %*% Z)
```

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8]
## [1,]    0    0    0    1    0    0    1    1
## [2,]    0    0    0    0    1    1    0    0
```

3. $Z^T X$

```
(ZTX <- t(XTZ))
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    0    0
## [2,]    0    0
## [3,]    0    0
## [4,]    1    0
## [5,]    0    1
## [6,]    0    1
## [7,]    1    0
## [8,]    1    0
```

4. $Z^T Z + A^{-1} \alpha$

```
(TZAINVAlpha <- t(Z) %*% Z + Ainv * alpha)
```

```
##           1  2  3           4  5  6  7  8
## 1  3.666667  1  0 -1.333333  0 -2  0  0
## 2  1.000000  4  1  0.000000 -2 -2  0  0
## 3  0.000000  1  4  0.000000 -2  1  0 -2
## 4 -1.333333  0  0  4.666667  1  0 -2  0
## 5  0.000000 -2 -2  1.000000  6  0 -2  0
## 6 -2.000000 -2  1  0.000000  0  6  0 -2
## 7  0.000000  0  0 -2.000000 -2  0  5  0
## 8  0.000000  0 -2  0.000000  0 -2  0  5
```

Aufstellen von M

```
(M <- rbind(cbind(XTX, XTZ), cbind(ZTX, TZAINVAlpha)))
```

```
##           1  2  3           4  5  6  7  8
## 3  0  0.000000  0  0  1.000000  0  0  1  1
## 0  2  0.000000  0  0  0.000000  1  1  0  0
## 1  0  0  3.666667  1  0 -1.333333  0 -2  0  0
## 2  0  0  1.000000  4  1  0.000000 -2 -2  0  0
## 3  0  0  0.000000  1  4  0.000000 -2  1  0 -2
## 4  1  0 -1.333333  0  0  4.666667  1  0 -2  0
## 5  0  1  0.000000 -2 -2  1.000000  6  0 -2  0
## 6  0  1 -2.000000 -2  1  0.000000  0  6  0 -2
## 7  1  0  0.000000  0  0 -2.000000 -2  0  5  0
## 8  1  0  0.000000  0 -2  0.000000  0 -2  0  5
```

Rechte Handseite (rhs)

Den Vektor y extrahieren wir direkt aus den Daten

```
(y <- dfWwg$Wwg)
```

```
## [1] 4.5 2.9 3.9 3.5 5.0
```

1. $X^T y$

```
(XTy <- t(X) %*% y)
```

```
##      [,1]
## [1,] 13.0
## [2,]  6.8
```

2. $Z^T y$

```
(ZTy <- t(Z) %*% y)
```

```
##      [,1]
## [1,]  0.0
## [2,]  0.0
## [3,]  0.0
## [4,]  4.5
## [5,]  2.9
## [6,]  3.9
## [7,]  3.5
## [8,]  5.0
```

Aufstellen von rhs

```
(rhs <- rbind(XTy,ZTy))
```

```
##      [,1]
## [1,] 13.0
## [2,]  6.8
## [3,]  0.0
## [4,]  0.0
## [5,]  0.0
## [6,]  4.5
## [7,]  2.9
## [8,]  3.9
## [9,]  3.5
## [10,] 5.0
```

Lösung

Für dieses kleine Beispiel können wir die Lösung als $sol = M^{-1} * rhs$ berechnen

```
(sol <- solve(M, rhs))
```

```
##      [,1]
##  4.358502330
##  3.404430006
## 1  0.098444576
## 2 -0.018770099
## 3 -0.041084203
## 4 -0.008663123
## 5 -0.185732099
## 6  0.176872088
## 7 -0.249458555
## 8  0.182614688
```