

# Züchtungslehre - Lösung 9

*Peter von Rohr*

2017-12-01

“

In dieser Übung wollen wir geschätzte Zuchtwerte aufgrund von verschiedenen Schätzmethoden miteinander vergleichen. Bei den Methoden handelt es sich um

- Zuchtwerte aufgrund von Eigenleistungen
- Zuchtwerte aufgrund von Nachkommenleistungen
- Zuchtwerte aufgrund eines Vatermodells
- Zuchtwerte aufgrund eines Tiermodells

Dazu verwenden wir den Datensatz aus der Übung von letzter Woche in einer veränderten Version. Der modifizierte Datensatz enthält auch Informationen zur Mutter.

Tochter	Herde	Vater	Mutter	Leistung
4	1	C	NA	110
5	1	A	4	100
6	2	B	NA	110
7	2	A	5	100
8	2	C	5	100
9	3	C	6	110
10	3	C	6	110
11	3	A	4	100
12	3	B	7	100

Für die Varianzkomponenten nehmen wir an, dass  $\sigma_e^2 = 100$  und  $\sigma_a^2 = 25$  ist. Die phänotypische Varianz  $\sigma_p^2$  lässt sich vollständig in  $\sigma_a^2$  und  $\sigma_e^2$  zerlegen.

## Aufgabe 1

Schätzen Sie für jede der Töchter Zuchtwerte aufgrund ihrer Eigenleistungen. Wir nehmen an das Populationsmittel  $\mu$  liege beim Mittelwert der phänotypischen Leistungen der Töchter.

## Lösung

Die Erblichkeit ( $h^2$ ) entspricht

$$h^2 = \frac{\sigma_a^2}{\sigma_a^2 + \sigma_e^2} = \frac{25}{125} = 0.2$$

.

Das Populationsmittel als Mittel über alle beobachteten Töchterleistung entspricht

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = 104.4$$

Der geschätzte Zuchtwert  $\hat{a}_i$  ist definiert als

$$\hat{a}_i = h^2(y - \mu)$$

Tochter	Zuchtwert
4	1.111
5	-0.889
6	1.111
7	-0.889
8	-0.889
9	1.111
10	1.111
11	-0.889
12	-0.889

## Aufgabe 2

Schätzen Sie für die drei Väter "A", "B", "C" Zuchtwerte aufgrund der mittleren Leistungen ihrer jeweiligen Nachkommen. Das Populationsmittel ( $\mu$ ) und die Erbllichkeit ( $h^2$ ) haben den gleichen Wert, wie in Aufgabe 1.

### Lösung

Die geschätzten Zuchtwerte aufgrund von Nachkommenleistungen sind abhängig von

$$k = \frac{4 - h^2}{h^2} = 19$$

Für einen bestimmten Vater  $s$  ist der geschätzte Zuchtwert aufgrund seiner Nachkommenleistungen definiert als

$$\hat{a}_s = \frac{2n}{n + k}(\tilde{y}_s - \mu)$$

wobei  $\tilde{y}_s$  die durchschnittliche Leistung der Nachkommen von Vater  $s$  ist.

Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über die Resultate

Vater	Anzahl Nachkommen	Mittlere Leistung	Zuchtwert
A	3	100.0	-1.212
B	2	105.0	0.106
C	4	107.5	1.063

### Aufgabe 3

Schätzen Sie die Zuchtwerte für die drei Väter “A”, “B” und “C” mit einem Vatermodell. Dabei soll die Herde als fixer Effekt und der Vater als zufälliger Effekt im Modell berücksichtigt werden. Die Väter “A”, “B” und “C” sind nicht verwandt miteinander und haben auch keine bekannten Eltern.

Die Aufgabe gliedert sich in die folgenden Schritte:

1. Notation des Gleichungssystems in Matrix-Vektor-Schreibweise
2. Bestimmung der Inzidenzmatrizen  $X$  und  $Z$
3. Aufstellen der Mischmodellgleichungen für das Vatermodell
4. Lösen der Mischmodellgleichungen
5. Aus den Lösungen von (4) die Schätzwerte für die fixen Effekte und die vorausgesagten Zuchtwerte für die Väter identifizieren

### Lösung

- **Schritt 1:** Notation des Gleichungssystems

$$y = Xb + Zs + e$$

mit  $y$  Vektor der phänotypischen Beobachtungen  
 $b$  Vektor der fixen Herdeneffekte  
 $s$  Vektor der zufälligen Vatereffekte  
 $X$  Inzidenzmatrix für  $b$   
 $Z$  Inzidenzmatrix für  $s$

- **Schritt 2:** Inzidenzmatrizen  $X$  und  $Z$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Schritt 3:** Mischmodellgleichungen

$$X^T X = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$X^T Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Z^T Z + A^{-1} \cdot \alpha = \begin{bmatrix} 22 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 23 \end{bmatrix}$$

wobei  $\alpha = \sigma_e^2/\sigma_s^2 = 118.75/6.25 = 19$  und  $A$  die Verwandtschaftsmatrix zwischen den Vätern. Hier wird angenommen, dass totale phänotypische Varianz  $\sigma_p^2 = 125$  konstant bleibt. Im Vatermodell entspricht die Varianz der Vätereffekte ( $\sigma_s^2$ ) einem Viertel der genetisch additiven Varianz ( $\sigma_a^2$ ). Die Restvarianz im Vatermodell ist dann die phänotypische Varianz minus die Varianz der Vätereffekte. Da die Väter nicht verwandt sind untereinander, ist  $A = I$ . Der Vektor der rechten Handseite besteht aus

$$X^T y = \begin{bmatrix} 210 \\ 310 \\ 420 \end{bmatrix}$$

$$Z^T y = \begin{bmatrix} 300 \\ 210 \\ 430 \end{bmatrix}$$

Zusammengestellt sehen die Mischmodellgleichungen für das Vatermodell, wie folgt aus

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 22 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 21 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 23 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}_{Herde1} \\ \hat{b}_{Herde2} \\ \hat{b}_{Herde3} \\ \hat{s}_{VaterA} \\ \hat{s}_{VaterB} \\ \hat{s}_{VaterC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 210 \\ 310 \\ 420 \\ 300 \\ 210 \\ 430 \end{bmatrix}$$

- **Schritt 4:** Lösung der Mischmodellgleichungen

$$\begin{bmatrix} \hat{b}_{Herde1} \\ \hat{b}_{Herde2} \\ \hat{b}_{Herde3} \\ \hat{s}_{VaterA} \\ \hat{s}_{VaterB} \\ \hat{s}_{VaterC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 22 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 21 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 23 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 210 \\ 310 \\ 420 \\ 300 \\ 210 \\ 430 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 105.0 \\ 103.3 \\ 104.9 \\ -0.6 \\ 0.1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

- **Schritt 5:** Identifikation der fixen und zufälligen Effekte

Die ersten drei Elemente des Lösungsvektor entsprechen den Lösungen für die fixen Effekte.

$$\begin{bmatrix} \hat{b}_{Herde1} \\ \hat{b}_{Herde2} \\ \hat{b}_{Herde3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 105.0 \\ 103.3 \\ 104.9 \end{bmatrix}$$

Die Elemente vier bis sechs entsprechen den Vorhersagen für die Vätereffekte

$$\begin{bmatrix} \hat{s}_{VaterA} \\ \hat{s}_{VaterB} \\ \hat{s}_{VaterC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.6 \\ 0.1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

## Aufgabe 4

Schätzen Sie die Zuchtwerte für alle Tiere im Pedigree (Väter und Töchter) mit dem Tiermodell. Dabei soll wieder die Herde als fixer Effekt und der Zuchtwert des Tieres als zufälliger Effekt berücksichtigt werden. Der Lösungsweg ist der gleiche, wie derjenige von Aufgabe 3. Der Unterschied besteht einzig im verwendeten Modell

### Lösung

- **Schritt 1:** Notation des Gleichungssystems

$$y = Xb + Za + e$$

mit  $y$  Vektor der phänotypischen Beobachtungen  
 $b$  Vektor der fixen Herdeneffekte  
 $a$  Vektor der zufälligen Zuchtwerte  
 $X$  Inzidenzmatrix für  $b$   
 $Z$  Inzidenzmatrix für  $a$

Wichtig ist hier, dass der Vektor  $a$  Zuchtwerte der drei Väter und aller neun Töchter enthält.

- **Schritt 2:** Inzidenzmatrizen  $X$  und  $Z$

Bei den fixen Effekten hat sich im Vergleich zu Aufgabe 3 nichts geändert. Deshalb können wir die Matrix  $X$  aus der Aufgabe 3 übernehmen. Als zufällige Effekte haben wir jetzt die Zuchtwerte aller Tiere und nicht mehr Vätereffekte. Die Matrix  $Z$  sieht somit etwas anders aus.

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Schritt 3:** Mischmodellgleichungen Da wir die Matrix  $X$  aus der Aufgabe 3 übernommen haben, bleibt sich auch  $X^T X$  gleich. Die verbleibenden Komponenten werden nun aufgelistet

$$\begin{bmatrix}
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 48 & 0 & 0 & 19 & -10 & 0 & -19 & 0 & 0 & 0 & -19 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 36 & 0 & 0 & 0 & -13 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & -22 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & -13 & 10 & 19 & 0 & -19 & -19 & -19 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 19 & 0 & -13 & 45 & -19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -19 & 0 \\
1 & 0 & 0 & -10 & 0 & 10 & -19 & 58 & 0 & -19 & -19 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -13 & 19 & 0 & 0 & 45 & 0 & 0 & -19 & -19 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -19 & 11 & 0 & 0 & -19 & 0 & 50 & 0 & 0 & 0 & 0 & -22 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -19 & 0 & -19 & 0 & 0 & 39 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -19 & 0 & 0 & -19 & 0 & 0 & 39 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -19 & 0 & 0 & -19 & 0 & 0 & 0 & 39 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -19 & 0 & 0 & -19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -22 & 0 & 0 & 0 & 0 & -22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 44
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\hat{b}_{Herde1} \\
\hat{b}_{Herde2} \\
\hat{b}_{Herde3} \\
\hat{a}_{VaterA} \\
\hat{a}_{VaterB} \\
\hat{a}_{VaterC} \\
\hat{a}_4 \\
\hat{a}_5 \\
\hat{a}_6 \\
\hat{a}_7 \\
\hat{a}_8 \\
\hat{a}_9 \\
\hat{a}_{10} \\
\hat{a}_{11} \\
\hat{a}_{12}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
210 \\
310 \\
420 \\
0 \\
0 \\
0 \\
110 \\
100 \\
110 \\
100 \\
100 \\
110 \\
110 \\
100 \\
100
\end{bmatrix}$$

• **Schritt 4:** Lösungen

$$\begin{bmatrix}
\hat{b}_{Herde1} \\
\hat{b}_{Herde2} \\
\hat{b}_{Herde3} \\
\hat{a}_{VaterA} \\
\hat{a}_{VaterB} \\
\hat{a}_{VaterC} \\
\hat{a}_4 \\
\hat{a}_5 \\
\hat{a}_6 \\
\hat{a}_7 \\
\hat{a}_8 \\
\hat{a}_9 \\
\hat{a}_{10} \\
\hat{a}_{11} \\
\hat{a}_{12}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 48 & 0 & 0 & 19 & -10 & 0 & -19 & 0 & 0 & 0 & -19 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 36 & 0 & 0 & 0 & -13 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & -22 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & -13 & 10 & 19 & 0 & -19 & -19 & -19 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 19 & 0 & -13 & 45 & -19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -19 & 0 \\
1 & 0 & 0 & -10 & 0 & 10 & -19 & 58 & 0 & -19 & -19 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -13 & 19 & 0 & 0 & 45 & 0 & 0 & -19 & -19 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -19 & 11 & 0 & 0 & -19 & 0 & 50 & 0 & 0 & 0 & 0 & -22 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -19 & 0 & -19 & 0 & 0 & 39 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -19 & 0 & 0 & -19 & 0 & 0 & 39 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -19 & 0 & 0 & -19 & 0 & 0 & 0 & 39 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -19 & 0 & 0 & -19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -22 & 0 & 0 & 0 & 0 & -22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 44
\end{bmatrix}^{-1}
\begin{bmatrix}
210 \\
310 \\
420 \\
0 \\
0 \\
0 \\
110 \\
100 \\
110 \\
100 \\
100 \\
110 \\
110 \\
100 \\
100
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
105.3 \\
103.5 \\
105.0 \\
-0.5 \\
0.2 \\
0.1 \\
-0.0 \\
-0.5 \\
0.5 \\
-0.6 \\
-0.3 \\
0.4 \\
0.4 \\
-0.4 \\
-0.3
\end{bmatrix}$$

• **Schritt 5:** Identifikation der Effekte

Die Lösungen für die fixen Effekte entsprechen wie in Aufgabe den ersten drei Elementen des Lösungsvektors.

$$\begin{bmatrix}
\hat{b}_{Herde1} \\
\hat{b}_{Herde2} \\
\hat{b}_{Herde3}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
105.3 \\
103.5 \\
105.0
\end{bmatrix}$$

Die verbleibenden Elemente im Lösungsvektor entsprechen den Zuchtwerten der drei Väter "A", "B" und "C" und der neun Töchter 1 bis 9.

$$\begin{bmatrix}
\hat{a}_{VaterA} \\
\hat{a}_{VaterB} \\
\hat{a}_{VaterC} \\
\hat{a}_4 \\
\hat{a}_5 \\
\hat{a}_6 \\
\hat{a}_7 \\
\hat{a}_8 \\
\hat{a}_9 \\
\hat{a}_{10} \\
\hat{a}_{11} \\
\hat{a}_{12}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-0.5 \\
0.2 \\
0.1 \\
-0.0 \\
-0.5 \\
0.5 \\
-0.6 \\
-0.3 \\
0.4 \\
0.4 \\
-0.4 \\
-0.3
\end{bmatrix}$$

## Aufgabe 5

Vergleichen Sie die Rangierungen der Tiere gemäss ihrer geschätzter Zuchtwerte aus den verschiedenen Methoden

### Lösung

Bei den Töchtern können wir die Zuchtwerte aufgrund der Eigenleistung und aufgrund des Tiermodells verglichen werden.

	Tochter	Eigenleistung	Tiermodell	
	4	4	1.1	0.0
	5	5	-0.9	-0.5
	6	6	1.1	0.5
	7	7	-0.9	-0.6
	8	8	-0.9	-0.3
	9	9	1.1	0.4
	10	10	1.1	0.4
	11	11	-0.9	-0.4
	12	12	-0.9	-0.3

Bei den Töchtern unterscheiden sich die Rangierungen zwischen “Eigenleistung” und “Tiermodell”. Die vorausgesagten Zuchtwerte aufgrund des Tiermodells sind klar zu bevorzugen, da diese die gesamte verfügbare Information, d.h. phänotypische Beobachtungen, systematische Umwelteinflüsse, Informationen zu Paarungspartnern und den Nachkommen, berücksichtigen. Bei der Eigenleistung wird nur die phänotypische Beobachtung berücksichtigt.

Bei den Vätern können wir einen Vergleich zwischen Zuchtwerten aufgrund von Nachkommenleistungen, aufgrund vom Vatermodell und aufgrund vom Tiermodell machen

Vater	Nachkommenleistung	Vatermodell	Tiermodell
A	-1.2	-0.6	-0.5
B	0.1	0.1	0.2
C	1.1	0.5	0.1

Bei den Vätern stimmt die Rangierung bei den Nachkommenleistungen und dem Vatermodell überein. Beim Tiermodell ist Vater “B” besser als Vater “C”. Auch hier gilt wieder, dass nur im Tiermodell alle verfügbaren Informationen berücksichtigt werden. Somit wären die Zuchtwerte aus dem Tiermodell also zu bevorzugen.