Züchtungslehre - Lösung 4

Peter von Rohr

2017-10-27

Aufgabe 1: Zuchtwert und Bestimmtheitsmass

Rind Elsa hat ein Absetzgewicht von 320 kg. Das Populationsmittel liegt bei 250 kg. Die Heritabilität (h^2) für das Merkmal Absetzgewicht ist 0.45.

a) Wie gross ist der Zuchtwert von Elsa für das Merkmal Absetzgewicht?
b) Berechnen Sie das Bestimmtheitsmass für den geschätzten Zuchtwert.

Lösung

a) Der geschätzte Zuchtwert aufgrund einer Eigenleistung beträgt

```
### # Hier wird der geschätzte Zuchtwert mit R berechnet
hat_a_el <- h2*(y-mu)
```

Hier werden die berechneten Werte in einer Gleichung eingesetzt.

$$\hat{a} = h^2(y - \mu) = 0.45 * (320 \text{ kg} - 250 \text{ kg}) = 31.5 \text{ kg}$$

b) Das Bestimmtheitsmass entspricht dem Quadrat der Korrelation zwischen dem wahren Zuchtwert und der Eigenleistung.

$$B = r_{a,y}^2 = h^2 = 0.45$$

Aufgabe 2: Zuchtwert aufgrund wiederholter Beobachtungen

Neben dem Absetzgewicht wurde für Rind Elsa auch das Geburtsgewicht (52 kg) und weitere Gewichtsmessungen vorgenommen. Wir nehmen an, die Heritabilität ($h^2 = 0.45$) sei gleich wie unter Aufgabe 1 und das Populationsmittel für die wiederholten Gewichtsmessungen liege bei 170 kg. Die Wiederholbarkeit der Gewichtsmessungen liege bei $t = 0.65$.

Die Liste der erhobenen Gewichte sieht wie folgt aus.

Messung	Gewicht
1	52
2	82
3	112
4	141
5	171
6	201
7	231
8	260
9	290
10	320

a) Schätzen Sie den Zuchtwert für Elsa aufgrund der wiederholten Gewichtsmessungen

b) Wie gross ist das Bestimmtheitsmass?
c) Vergleichen Sie das unter b) berechnete Bestimmtheitsmass mit dem Bestimmtheitsmass aus Aufgabe 1.

Lösung

a) Der Zuchtwert aufgrund wiederholter Messungen beträgt

$$\hat{a}_i = \frac{nh^2}{1+(n-1)t}(\bar{y}_i - \mu) = \frac{10 * 0.45}{1+(9*0.65)}(186-170) = 10.51$$

b) Das Bestimmtheitsmass für den Zuchtwert aus wiederholten Messungen beträgt

$$B = r^2_{a,\bar{y}} = b = \frac{nh^2}{1+(n-1)t} = \frac{10*0.45}{1+(9*0.65)} = 0.66$$

c) Das Bestimmtheitsmass des Zuchtwertes aufgrund der wiederholten Messungen ist grösser. Der Verhältnis der beiden Bestimmtheitsmasse beträgt

$$\frac{r^2_{a,\bar{y}}}{r^2_{a,y}} = \frac{n}{1+(n-1)t} = \frac{10}{1+(9*0.65)} = 1.71$$

Aufgabe 3: Zuchtwert und Vertrauensintervall

In der Vorlesung hatten wir das Bestimmtheitsmass als Genauigkeitsangabe für den geschätzten Zuchtwert kennen gelernt. Das Bestimmtheitsmass ist das Quadrat der Korrelation zwischen dem wahren Zuchtwert und dem Selektionskriterium. Das Bestimmtheitsmass macht also eine Aussage, wie gut das Selektionskriterium (in unseren Beispielen die jeweiligen phänotypischen Beobachtungen) geeignet ist den unbekannten Zuchtwert zu schätzen.

Alternativ zum Bestimmtheitsmass, ist die Standardabweichung $\sqrt{var(\hat{a})}$ des geschätzten Zuchtwerts eine Information zur Schätzgenauigkeit. Mit dieser Standardabweichung des geschätzten Zuchtwertes können Vertrauensintervalle berechnet werden. Diese geben an, mit wieviel Unsicherheit der geschätzte Zuchtwert behaftet ist. Ein enges Vertrauensintervall bedeutet, dass der geschätzte Zuchtwert eine tiefe Unsicherheit aufweist. Die Vertrauensintervalle sind immer mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit assoziiert. Ein gängiger Wert für die Irrtumswahrscheinlichkeit ist $\alpha = 0.05$. Die führt dann zum 95%-Vertrauensintervall.

Für einen geschätzten Zuchtwert $\hat{a}$ lässt sich das 95%-Vertrauensintervall mit der folgenden Prozedur berechnen. Bis anhin haben wir Zuchtwerte aufgrund einer angenommenen Regression der wahren Zuchtwerte auf phänotypische Beobachtungen geschätzt. Die phänotypischen Beobachtungen sind mit einer gewissen Unsicherheit behaftet und werden als Zuvallsvariable mit einer gewissen Häufigkeitsverteilung betrachtet. Da der geschätzte Zuchtwert $\hat{a}$ eine Funktion der Daten (y) ist, ist auch $\hat{a}$ eine Zufallsvariable mit einer zugehörigen Häufigkeitsverteilung. Wir nehmen an, dass die Häufigkeitsverteilung der phänotypischen Beobachtungen (y) und der geschätzten Zuchtwerte $\hat{a}$ eine Normalverteilung ist. Für die geschätzten Zuchtwerte liegt der Erwartungswert beim entsprechenden Schätzwert $\hat{a}$ und die Varianz $(var(\hat{a}))$ kann berechnet werden aufgrund der Schätzgleichung für a.

Beim Beispiel aus Aufgabe 1, wo der Zuchtwert aufrund einer Eigenleistung berechnet wurde, sieht die Berechnung der Standardabweichung $\sqrt{var(\hat{a})}$ des geschätzten Zuchtwertes, wie folgt aus. An dieser Stelle nehmen wir an, dass die phänotypische Standardabweichung für das Absetzgewicht und das Gewicht 20 kg betrage.

$$\sqrt{var(\hat{a})} = \sqrt{var(b(y-\mu))} = b\sqrt{var(y)} = h^2\sqrt{var(y)} = 0.45 * 20 = 9$$

Aufgrund der Eigenschaften der Normalverteilung liegen 95% der Wahrscheinlichkeitsmasse ± 1.96 Standardabweichungen um den Erwartungswert. Somit sind die untere (ug) und die obere (og) Grenze des 95%-Vertrauensintervalls definiert als

$$ug = \hat{a} - 1.96 * \sqrt{var(\hat{a})} = 31.5 \text{ kg} - 1.96 * 9 \text{ kg} = 13.86 \text{ kg}$$

$$og = \hat{a} + 1.96 * \sqrt{var(\hat{a})} = 31.5 \text{ kg} + 1.96 * 9 \text{ kg} = 49.14 \text{ kg}$$

Dies bedeutet, dass wenn wir sehr viele (theoretisch unendlich viele) Tiere mit gleichem wahren Zuchtwert haben und deren phänotypische Leistung beobachten und aufgrund dieser Leistungen jeweilen den entsprechenden Zuchtwert schätzen, dann liegen 95% dieser geschätzten Zuchtwerte innerhalb des Vertrauensintervalls zwischen 13.86 kg und 49.14 kg.

Ihre Aufgabe

Berechnen Sie das 95%-Vertrauensintervall für den in Aufgabe 2 geschätzten Zuchtwert für das Gewicht.

Lösung

Zur Berechnung der Grenzen des Vertrauensintervals benötigen wir zuerst die Standardabweichung des geschätzten Zuchtwertes. Diese beträgt für das Beispiel der wiederholten Messungen

$$\begin{aligned}
\sqrt{var(\hat{a})} &= \sqrt{var(b(\bar{y} - \mu))} = b * \sqrt{var(\bar{y})} \\
&= \frac{nh^2}{1 + (n-1)t} * \sqrt{[t + (1-t)/n] \;\; var(y)} \\
&= \frac{10 * 0.45}{1 + (9 * 0.65)} * \sqrt{[0.65 + (1 - 0.65)/10] * 20} \\
&= 10.87 \qquad (1)
\end{aligned}$$

Die untere und die obere Grenze des Vertrauensintervalls sind somit

$$ug = \hat{a} - 1.96 * \sqrt{var(\hat{a})} = 10.51 - 1.96 * 10.87 = -10.7952$$

$$og = \hat{a} + 1.96 * \sqrt{var(\hat{a})} = 10.51 + 1.96 * 10.87 = 31.8152$$